Evacuación de Fluidos – Teorema de Torricelli

Física 1 – BUC – UNSAM

Objetivo

Estudiar experimentalmente el fenómeno de desagote de un liquido de un recipiente a través de un orificio. También nos proponemos investigar la cinemática asociada a la caída de "tiro horizontal" con un fluido y su comparación con las correspondientes características de un sólido. Finalmente, deseamos explorar la aplicación del teorema de Bernoulli a un caso simple como así también la validez del teorema de Torricelli para explicar cuantitativamente el fenómeno de desagote de un liquido.

Introducción

Consideremos el caso de un recipiente cilíndrico de diámetro d_2, cuya área transversal es S_2, conteniendo un fluido, por ejemplo agua, hasta cierto nivel h_2, como se indica esquemáticamente en la Fig.1. Nuestro recipiente drena por un pequeño orificio en la parte inferior de diámetro d_1 y sección S_1 ($S_1 << S_2$). La velocidad de evacuación del fluido a la salida de este orificio la llamamos u_1.

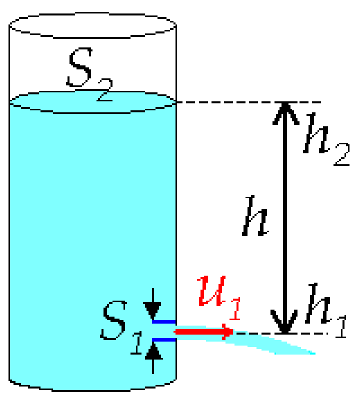

Figura 1: Esquema del dispositivo experimental.

Desarrollo teórico del modelo de Torricelli

Aplicando el teorema de Bernoulli en los puntos 1 y 2, del diagrama ilustrado en la Fig.1, podemos escribir la siguiente expresión:

$$P_1 + g\rho \cdot h_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot u_1{}^2 = P_2 + g\rho \cdot h_2 + \frac{1}{2}\rho \cdot u_2{}^2 \qquad (1)$$

Donde ρ es la densidad del fluido, P_1 y P_2 son las presión de los puntos 1 y 2 respectivamente. De igual modo u_1 y u_2 designan las velocidades del fluido en los puntos 1 y 2 receptivamente. La presión en la interfase aire – agua superior (punto 2) es la presión atmosférica ($P_{atm} = P_2$). También se supone que es posible identificar P_1 con la presión atmosférica, por ende:

$$P_1 = P_2 = P_{atm} \tag{2}$$

Por lo tanto la ecuación 1 puede escribirse como:

$$gh_1 + \frac{1}{2}u_1^{\ 2} = +gh_2 + \frac{1}{2}u_2^{\ 2} \tag{3}$$

Por otro lado, la ecuación de continuidad (conservación de la masa) conduce a la conservación del caudal, a partir de la cual puede establecerse que:

$$Q_1 = Q_2 \quad \Rightarrow \quad u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = u_1 \frac{S_1}{S_2} \tag{4}$$

Si expresamos esta relación en términos de los diámetros respectivos, tenemos:

$$u_2 = u_1 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \tag{5}$$

Si se reemplaza este valor en la (3), podemos escribir la velocidad de evacuación por la siguiente relación:

$$u_1 = \sqrt{\frac{2g(h_2 - h_1)}{\left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right)}} = \gamma \cdot \sqrt{2gh} \tag{6}$$

con:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4}} \ . \tag{7}$$

El modelo utilizado por Torricelli, cosiste en suponer la siguiente aproximación: $d_1 << d_2$, por ello $(d_1/d_2)^4 \approx 0$ y $\gamma = 1$, pudiendo de este modo escribir la velocidad de evacuación como:

$$u_1 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} = \sqrt{2gh} \ . \tag{8}$$

Este resultado aproximado se conoce como el Teorema de Torricelli.

Al salir un fluido por un orificio en general se produce una contracción de las sección transversal del mismo, como se ilustra esquemáticamente en la fig.2, Este fenómeno se conoce como "*vena contracta*".[1,2,4,5] Este estrechamiento en general depende del número de Reynolds[2] Re (=$d.\rho.v/\eta$, siendo η la viscosidad del fluido). Asimismo en fluidos reales, la energía no se conserva estrictamente como indica implícitamente el teorema de Bernoulli. Estos dos efectos se pueden resumir en un coeficiente μ (Coeficiente de gasto o caudal) que multiplica al segundo miembro de (8), es decir:

$$u_1 = \mu \cdot \sqrt{2gh}\ . \tag{9}$$

El coeficiente de gasto μ también es una función de número de Reynolds. Una aproximación empírica de μ para *Re*<15 es:

$$\mu \approx \frac{\mathrm{Re}}{25 + \mu \cdot \mathrm{Re}}\ . \tag{10}$$

Para *Re* grandes se sugiere el uso de la formula de Altschul que es particularmente adecuada apara $Re>10^4$, pero que también resulta una aproximación adecuada para *Re* menores.[2]

$$\mu \approx 0.59 + \frac{5.5}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\ . \tag{11}$$

En general, si *Re*>50, $\mu \approx 0.60 \pm 0.02$. Incluyendo estos efectos, la expresión (6) puede escribirse como:

$$u_1 = \mu \cdot \gamma \cdot \sqrt{2gh}\ . \tag{12}$$

Que constituye una expresión más adecuada y completa del teorema de Torricelli.

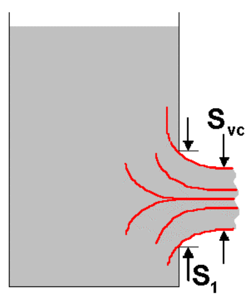

Figura 2: Vena contracta, esquema de las características de un flujo de un fluido al salir por un orificio.

Tiempo de evacuación de un recipiente: Si se desea estimar el tiempo de vaciado de un recipiente, t_v, por una abertura S1, partiendo de la expresión (12), suponiendo que durante el vaciado del tanque μ es aproximadamente constante, el flujo saliente de liquido. Q_1, será:

$$Q_1 = S_1 \cdot u_1 = S_2 \cdot u_2 = S_1 \cdot \mu \cdot \gamma \cdot \sqrt{2gh} \tag{13}$$

Dado que $u_2 = dh/dt$, tenemos que:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \mu \cdot \gamma \cdot \sqrt{2gh}\ . \tag{14}$$

por lo tanto, integrando esta última expresión tenemos:

$$\sqrt{h}-\sqrt{h_0}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{S_1}{S_2}\cdot\gamma\cdot\mu\cdot\sqrt{2g}\cdot t\,. \tag{15}$$

Aquí, $h_0=h_1-h_2$. De donde el tiempo de vaciado t_v vendrá dado por:

$$t_v=\sqrt{\frac{2\cdot h_0}{g}}\cdot\frac{S_2}{S_1}\cdot\frac{1}{\gamma\cdot\mu}=\sqrt{\frac{2\cdot h_0}{g_{ef}}}\,. \tag{16}$$

con

$$g_{ef}=-\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{g\cdot\mu^2}{\left[(d_2/d_1)^4-1\right]}=\frac{g\cdot\mu^2}{\left[(S_2/S_1)^2-1\right]}=\frac{2h_0}{t_v^2}\,. \tag{17}$$

Aquí g_{ef}, representa la aceleración efectiva con la que desciende la superficie libre del liquido en el recipiente. Con la introducción de este parámetro, g_{ef}, la expresión (16) es similar a la expresión que describe la caída libre de un cuerpo desde una altura h. Sin embargo hay una diferencia notable, mientras un cuerpo en caída libre se acelera al descender, la superficie libre de un liquido, va disminuyendo su velocidad al ir decendiendo.[6]

Usando esta definición de t_v, la expresión (15) puede escribirse como:

$$h(t)=h_0\cdot\left(1-\frac{t}{t_v}\right)^2\,. \tag{18}$$

Por lo tanto, si las hipótesis aquí formuladas son correctas, graficando la raíz cuadrada de la altura *h* en función del tiempo, deberíamos obtener una recta, cuya pendiente y ordenada al origen darían los valores de t_v y h_0. Para el caso de un cuerpo que cae desde una altura y_0 en un tiempo t_c, es fácil demostrar que:

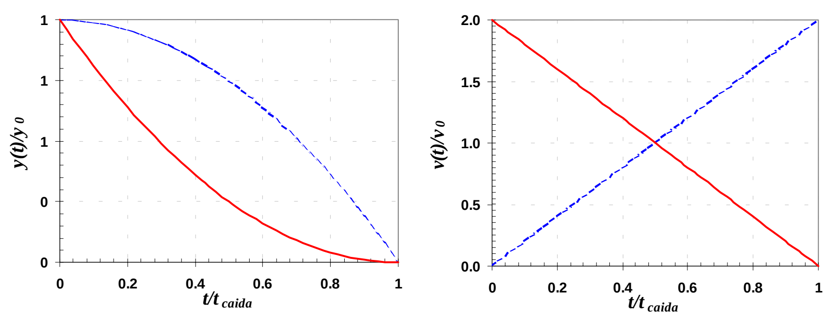

Figura 3: Comparación del comportamiento de la cinemática de descenso de un cuerpo con roce despreciable y de la superficie libre de un recipiente con un orificio. En líneas de trazos representamos el aso del cuerpo y con trazos continuos el de la superficie libre del recipiente. En todos los casos la coordenada horizontal es el cociente t/tiempo de caída.

$$y(t)=y_0\cdot\left(1-\left(\frac{t}{t_c}\right)^2\right)\,. \tag{19}$$

y sus correspondientes velocidades serán:

$$v(t)=\frac{dy}{dt}=-\frac{y_0}{t_c}\cdot\left(1-\left(\frac{t}{t_c}\right)\right)\quad.\quad \text{y}\quad u_2(t)=\frac{dh}{dt}=-\frac{2h_0}{t_v}\cdot\left(1-\frac{t}{t_v}\right) \tag{20}$$

En la Figura 3 se ilustra esquemáticamente estos comportamientos.

Procedimientos y métodos

Si se considera el dispositivo que se muestra en la figura 3, la velocidad de evacuación del fluido se calcula a partir de considerar que las gotas de agua se comportan como partículas puntuales, las cuales siguen las siguientes ecuaciones de movimiento en las direcciones x e y:

$$x(t)=u_1 t \quad \text{e} \quad y(t)=\ y(t)=\frac{1}{2}gt^2 \tag{21}$$

de donde

$$y(x)=H_0-\frac{g}{2\cdot u_1^2}\cdot x^2 \quad . \tag{22}$$

Combinado esta última expresión con (12) obtenemos:

$$y(x)=H_0-\frac{1}{4\cdot\gamma^2\mu^2\cdot h}\cdot x^2 \quad . \tag{23}$$

Por lo tanto, la distancia x_f donde el flujo de fluido baja una altura H_0 desde el orificio (Fig.4) viene dada por:

$$x_f^2\ =\{4\gamma^2\mu^2\cdot H_0\}\cdot h \quad . \tag{24}$$

Estas expresiones indican que un medio de poner a prueba las hipótesis implícitas en las Ecs.(22), (23) y (24), consistiría en comparar la predicción (20) con las datos experimentales. Más específicamente, constatar si la trayectoria del liquido vertiendo por una abertura lateral ("tiro horizontal") es efectivamente parabólica como indica (22). Si lo es, del ajuste de esta curva se puede obtener u_1. Por otro lado, si la relación entre x_f^2 y h es efectivamente lineal como indica (24). Incidentalmente, la expresión (24) sugiere que la cinemática de caída de un fluido es totalmente equivalente a la de los sólidos, o sea que los líquidos y sólidos siguen las mismas leyes física. Si la relación entre x_f^2 y h fuese lineal, se corroboraría que este formalismo propuesto, basado en el teorema de Bernoulli, es adecuado para describir a los líquidos que fluyen por un orificio.

Arreglo experimental

Se propone construir un dispositivo como el de la figura 3. Con una cámara digital conectada a una PC para capturar las imágenes del dispositivo experimental. Se sugieren la siguientes actividades:

- ✓ Tomar fotos a distintas alturas h del fluido, y simultáneamente registrar el tiempo t y la altura h de la superficie libre del liquido. Esta última altura también se puede obtener de la foto, pero por lo general es más precisa la determinación si se la realiza por medición directa.

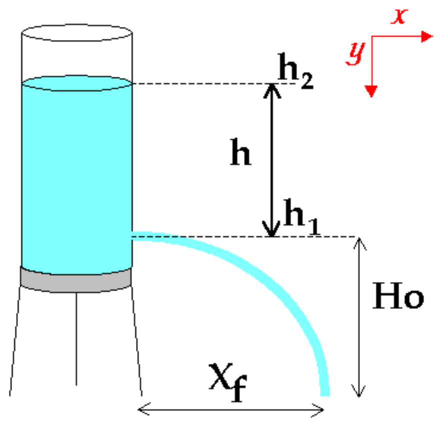

Figura 4: Esquema del dispositivo experimental.

- ✓ Medir las distancias x_f a partir del número de píxeles de la foto, también de la misma foto se puede obtener h.
- ✓ A partir de la ecuación 20 se calcula la velocidad u_1, para cada altura h. Para esto último es conveniente graficar $[H_0\text{-}y(x)]$ como función de x^2. Luego, con los datos obtenidos, graficar u_1 en función de h y estudiar si es válida la aproximación realizada por Torricelli (8) o la (12). Comparar ambos modelos y discutir cual describe mejor los datos.
- ✓ Del ajuste de $y(x)$ en función de x^2, determine el valor de μ. Del punto anterior conoce u_1, por lo tanto puede calcular *Re* y de (10) y (11) puede estimar este valor de μ. Compare si estos valores de μ obtenidos por ambos métodos coinciden o no.
- ✓ Grafique x_f^2 en función de h. ¿Es efectivamente lineal esta relación como indica (16)? Discuta sus refutados.
- ✓ ¿Qué puede concluir de este estudio respecto de teorema de Torricelli y el teorema de Bernoulli?
- ✓ Grafique $\sqrt{h}$ como función de *t*, tomando como origen de tiempo, el inicial de la medición, es decir para $t=0,\ h=h_0$. ¿Se verifica que la relación es lineal? Si lo es, obtenga el valor de t_v para cada una de las realizaciones del experimento y compárelo con el efectivamente observado.
- ✓ De esta última medición, obtenga el valor de u. y compárelo con lo esperado según la relaciones (10) y (11).

Referencias

1. *A Brief Introduction to Fluid Mechanics* – D. F. Young, B.R. Munson and T. H. Okiishi – John Wiley & Sons, Inc. N.Y. 1997 (ISBN 0-471-13771-5).
2. *Hidráulica* – B. Nekrasov – Ed. Mir Moscú 1968.
3. *Mecánica de los Fluidos* - Victor L. Streeter - Mc Graw-Hill México 1970
4. *Manual del Ingeniero Químico John L.* PerrUnion Tipografica Ed. Hispaoamericana - Mexico 1966 (Chemical Engineers' Handbook - Mc Graw-Hill NY 1966).
5. *Física para Estudiantes de Ciencias e Ingeniería*- Halliday, Resnik y Krane, 4ta. Ed. Vol. II . – Cía. Editorial Continental, S.A. México- 1985.
6. *Mechanics of the slow draining of a large tank under gravity*- J.N. Libii Am.J. phys. **71**(11) 1204 (2003).