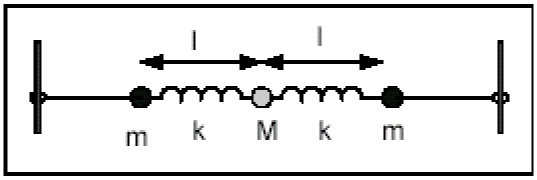
Física 2. Segundo cuatrimestre 2006

Guía Nº5: Oscilaciones Forzadas: Resonancias



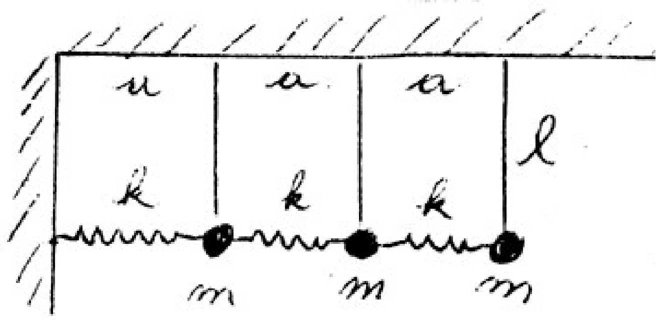
1) Se tiene el sistema de la figura, con $M = 2m$. Se aplica a la masa del centro una fuerza armónica de frecuencia ω

a) ¿Qué modos se observan si los dos extremos están fijos? Cuáles son las resonancias del sistema?

b) ¿Cómo se modifica el resultado a) si los extremos están libres?

c) ¿Y si sólo está libre el de la derecha?

2) Considere el sistema de 3 péndulos acoplados que se muestra en la figura. Cada uno de ellos está sometido a una fuerza de amortiguamiento de coeficiente Γ.



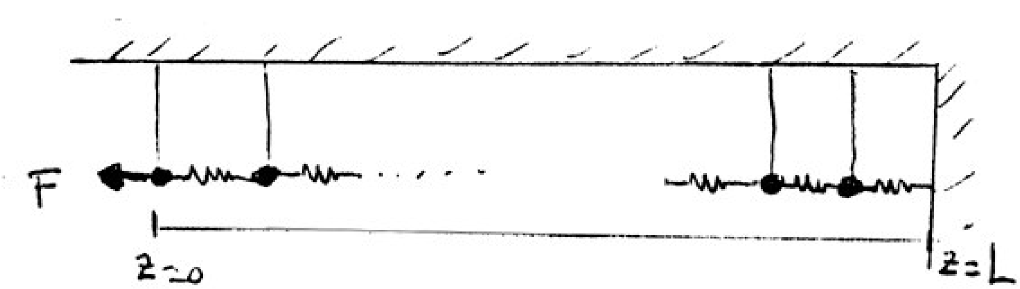
a) Escriba la ecuación de movimiento para cada masa y encuentre las frecuencias propias y los modos normales del sistema.

b) Considere que el estado de movimiento de cada masa está descripto por una superposición de modos normales. Analice el movimiento que realiza cada masa cuando el amortiguamiento es el crítico para alguna de las frecuencias propias.

c) Suponga que en el extremo libre se aplica una fuerza $F = F_0 \cos(\omega t)$. Escriba la ecuación de movimiento para cada masa y encuentre la solución estacionaria para cada modo. ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia?

3) Considere un arreglo lineal de péndulos acoplados excitados cuyo extremo inferior está en $z = 0$ y unidos a una pared rígida en $z = L$, como se muestra en la figura.

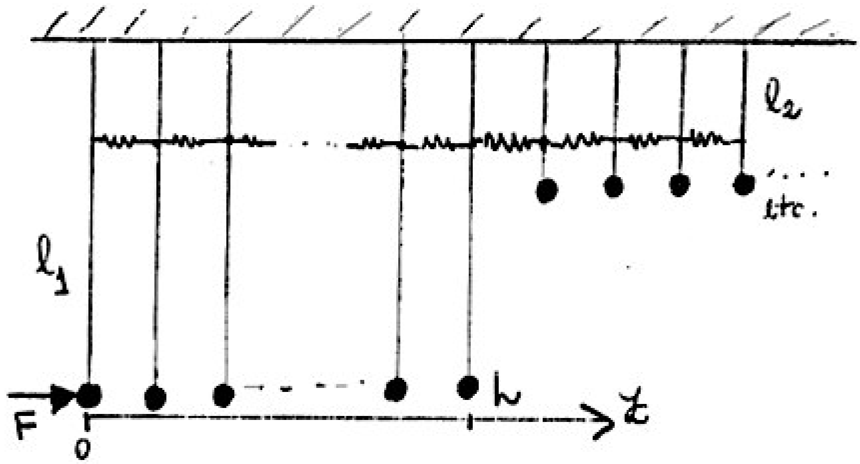
Demuestre que si $\Psi(z,t)$ es igual a $A_0 \cos(\Omega t)$ en $z = 0$, entonces



$$\Psi(z,t) = A_0 \frac{e^{-\kappa z} - e^{-\kappa L}\, e^{-\kappa(L-z)}}{1 - e^{2\kappa L}} \cos(\Omega t)$$

Observe que para $L \to \infty$ esto se hace simplemente $A_0 e^{-\kappa z} \cos(\Omega t)$.

4) Considere un sistema de péndulos acoplados con un cambio brusco en ω_0^2 en $z = L$, según se esquematiza en la figura.



En la región (1) la amplitud de las oscilaciones está dada por

$$A_1(z) = C\left\{\frac{-\kappa}{k}\,\mathrm{sen}[k(z-L)] + \cos[k(z-L)]\right\}$$

La condición de contorno en $z = 0$ es $A_1(z = 0) = A_0$ y conduce a la siguiente expresión para C:

$$C = \frac{A_0}{\frac{\kappa}{k}\,\mathrm{sen}(kL) + \cos(kL)}$$

cuyo denominador tiende a cero para ciertos valores de $k\,L$ y dando lugar a una amplitud C "infinita". Dichos valores de $k\,L$ determinan las *frecuencias de resonancia* del sistema.

a) Demuestre que en resonancia se tiene

$$k\cot(kL) = -\kappa$$

Esto demuestra que los valores resonantes de $\theta = k\,L$ deben estar en los cuadrantes 2,4,6,...

b) Sea $K\,a^2/M\,L^2$ igual a "una unidad" de fuerza restauradora por unidad de desplazamiento y por unidad de masa, esto es, de ω^2. Sea $g/l_1 = \omega_1^2$ y $g/l_2 = \omega_2^2$. Pruebe entonces que los valores de resonancia de ω^2 se obtienen llevando a un gráfico en función de θ las dos funciones

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \theta^2$$
$$\omega^2 = \omega_2^2 - \theta^2\cot^2(\theta)$$

Las resonancias están dadas por la mitad de los puntos de intersección de las dos curvas. ¿Por qué solamente la mitad? Realice un esquema que muestre un gráfico típico que dé las frecuencias de resonancia. ¿Qué sucede para frecuencias muy altas?

5) Se tiene una cuerda ideal de longitud L y densidad lineal de masa ρ_0 sometida a una tensión T_0. Un extremo de la cuerda está fijo. Analice las oscilaciones transversales de dicha cuerda Ψ(x,t) cuando: i) El extremo libre es excitado por una amplitud $A_0\cos\omega t$ y ii) el extremo libre es excitado por una fuerza externa transversal $F_0\cos\omega t$.
Para ambos casos, resuelva los siguientes items:

(a) Encontrar el régimen permanente (régimen asintótico a tiempos largos después de iniciada la excitación) del problema.

(b) Encontrar las frecuencias de resonancia.

(c) Discutir la necesidad (o no) de incluir una pequeña fuerza de rozamiento para alcanzar el régimen permanente y la validez de la solución hallada en un experimento real

6) Se tiene un tubo cerrado en uno de sus extremos; su longitud es menor que 1 m. Se acerca al extremo abierto un diapasón que está vibrando con $\nu = 440\ Hz$. Considere $v_s = 330\ m/s$.
a) Hallar las posibles longitudes del tubo para que haya resonancia. Para cada una de ellas, ¿en qué modo está vibrando el aire contenido en el tubo?
b) Repetir a), si el tubo está abierto en ambos extremos.

6) Un tubo de 1 m de longitud está cerrado en su parte inferior. Un hilo extendido se coloca sobre el lado abierto del tubo. El hilo tiene 30 cm de longitud y una masa de 0.01 kg. Fijado en dos extremos, el hilo vibra en su modo fundamental excitando una resonancia en la columna de aire del tubo. Lo hace vibrar en su frecuencia fundamental. Calcular:
a) la frecuencia de oscilación de la columna de aire.
b) la tensión del hilo.