

**Física 2. Segundo cuatrimestre 2008.**  
**Cátedra: Vera Brudny**  
**Guía N°8: Medios materiales (dispersión)**

**A -Dispersión**

**Problema 1:** En un medio de baja densidad, el índice de refracción se puede modelar como (Refiérase a Hecht para ver una deducción del modelo)

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right) = 1 + \omega_{plasma}^2 \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right)$$

- a) Escriba la relación de dispersión  $k(\omega)$ . Grafique.
- b) Calcule la velocidad de fase y la velocidad de grupo. Grafique.
- c) Encuentre la región de propagación (rango de frecuencias en que la onda se puede propagar, por lo tanto no es evanescente)
- d) Halle el coeficiente de atenuación o amplificación

**Problema 2:** La dispersión cromática se define a partir de la expansión en serie de Taylor del número de onda (cambio en la fase espectral por unidad de longitud) como función de la frecuencia angular, alrededor de alguna frecuencia característica, por ejemplo la del láser que se este utilizando. Mostrar que dada la relación de dispersión  $\omega(k)$ , se tiene

$$k(\omega) = k_o + k'(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2} k''(\omega - \omega_o)^2 + \dots \quad (1)$$

con  $k' \equiv \frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega} \equiv \frac{1}{v_g}$  y  $k'' \equiv \frac{\partial^2 k(\omega)}{\partial \omega^2} \equiv \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{v_g} \right)$

La constante  $k''$  es conocida como dispersión de la velocidad de grupo. En algunas ramas de la óptica suele darse en términos de la derivada respecto de la longitud de onda. Muestre la siguiente igualdad

$$k'' \equiv \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{v_g} \right) = \frac{-\lambda^2}{2\pi c} D, \text{ con } D = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{v_g} \right)$$

Se dice que el medio exhibe dispersión normal cuando  $k''$  es positivo, por el contrario valores negativos corresponden a la dispersión anómala. El primer caso es el que se encuentra más frecuentemente, y se debe a que el índice de refracción es decreciente con la longitud de onda. Algunos datos experimentales: la dispersión de la velocidad de grupo para el silicio es  $+36 \text{ fs}^2/\text{mm}$  @ 800nm,  $-22 \text{ fs}^2/\text{mm}$  @ 1500nm y es casi nula cerca de 1270nm.

**Problema 3:** Sea un pulso que se propaga en un medio que exhibe dispersión cromática. Suponga que la relación de dispersión es aproximadamente cuadrática en un entorno de  $\omega_0$  (frecuencia central del espectro del pulso), de modo que podemos aproximarla por su serie de Taylor de orden 2 (ecuación 1). En  $x=0$ , el pulso está descrito por

$$E(t) = E_0 \text{Exp}[-\Gamma t^2 + i\omega_0 t - i\alpha t^2]$$

- ¿Cuál es la fase del pulso?
- Se define a la frecuencia instantánea  $\omega(t)$  como la derivada de la fase respecto del tiempo. Realice un gráfico de  $\omega(t)$  y de la intensidad del campo. Estudie como es la distribución temporal de frecuencias en el ancho del pulso según el signo de  $\alpha$
- Utilizando la descomposición en ondas planas (transformada de Fourier), calcule cuál es la forma del pulso luego de recorrer una distancia  $x$  dentro del medio.
- Mostrar, a partir de la expresión encontrada en el inciso anterior, la influencia de cada término de la expansión en serie de la relación de dispersión en la propagación del pulso. Esto es, que el término de orden cero representa un defasaje común a todas las frecuencias, el término de orden 1 describe un retardo temporal global sin ninguna consecuencia sobre la forma del pulso, y el término de orden 2 está relacionado con el ancho del pulso.
- Analice el comportamiento de el ancho del pulso, según sea el valor de  $k$ .

**Problema 4:** Sea un medio que tiene un índice de refracción  $n_x$  según el eje  $x$  y  $n_y$  según el eje  $y$ . Ejemplos de estos pueden ser los cristales birrefringentes, o las fibras ópticas que debido a su proceso de fabricación, o a que al ser dobladas sufrieron esfuerzos mecánicos, tienen una anisotropía del índice. Algunos datos para fibras de silicio, la birrefringencia  $B = \frac{\bar{n}_x - \bar{n}_y}{\bar{n}_x}$  varía entre  $10^{-4}$  y  $10^{-5}$  en longitudes del orden de centímetros.

Suponga que una onda plana circularmente polarizada incide sobre dicho medio.

- Escriba a dicha onda en los ejes  $x$  y  $y$
- Escriba cual es el campo resultante luego de atravesar una distancia  $L$  dentro del material.
- Mostrar que la polarización cambia de manera periódica y hallar el período
- Suponga que incide un pulso sobre dicho medio. Debido a la birrefringencia, un detector a la salida medirá dos pulsos. Estime cuál es la diferencia de tiempo de llegada de dichos pulsos al detector, si el pulso recorrió una distancia  $L$

**B- Elementos de óptica geométrica 1 (Ley de Snell)-Dispersión angular.** Como resultado de la dispersión cromática los ángulos de refracción en las superficies ópticas dependen de la frecuencia de la luz, causando dispersión angular.

**Problema 5:** Los índices de refracción de cierta clase de vidrio para el rojo y el violeta valen: 1,51 y 1,53, respectivamente. Halle los ángulos límites de reflexión total para rayos que incidan en la superficie de separación vidrio-aire. ¿Qué ocurre si un rayo de luz blanca incide formando un ángulo de  $41^\circ$  sobre dicha superficie?

**Problema 6:**

a) Demuestre que un rayo que incide sobre una lámina de caras paralelas, inmersa en un medio único, no se desvía al atravesarla. Calcule el desplazamiento lateral de dicho rayo, en términos de su espesor  $d$  y de su índice de refracción  $n$ .

b) Demuestre que el rayo que se refleja en la primera cara y el que emerge luego de reflejarse en la segunda son paralelos.

c) Si el medio exterior es único, ¿existe algún ángulo de incidencia tal que produzca reflexión total en la cara inferior?

**Problema 7:** Se tiene un vidrio de índice de refracción  $\eta$ . Se define como ángulo de desviación al ángulo  $\delta$  entre el haz incidente y el transmitido:

a) Expresar la desviación como función del ángulo de incidencia.

b) Mostrar que si el prisma es delgado y el ángulo de incidencia es pequeño la desviación no depende del ángulo de incidencia. Calcular dicha desviación.

**Problema 8:**

a) En un vidrio óptico común se propaga un haz de luz blanca, ¿qué componente viaja más rápido: la roja o la violeta? ( $\eta_{\text{rojo}} = 1.51$ ;  $\eta_{\text{violeta}} = 1.53$ ).

b) ¿Para cuál de ambos colores será mayor la desviación en un prisma?

c) Se tiene un prisma de ángulo  $\alpha = 10^\circ$ . ¿A que distancia debe colocarse una pantalla para resolver el rojo y el violeta en 1 mm?