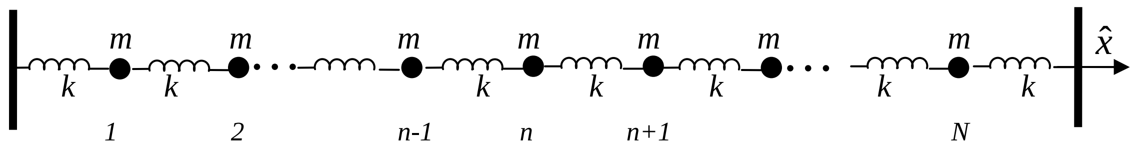
Física 2. Cátedra: Vera Brudny
Guía 3 Modos Normales 2.
Sistemas continuos limitados en el espacio.

Problema 1. Considere el sistema de N masas que se muestra en la figura. Cuando el sistema se encuentra en equilibrio, la distancia entre dos masas consecutivas es a. Las masas pueden oscilar únicamente en la dirección $\hat{x}$.



a) Escriba la ecuación de movimiento para la partícula n.
b) Proponga una solución de la forma:

$$\psi_n^{(p)}(t) = A^{(p)} \cos(nk^{(p)}a + \alpha^{(p)}) \cos(\omega^{(p)}t + \phi^{(p)})$$

Halle la relación de dispersión y grafíquela. ¿Depende esta relación de las condiciones de contorno?, ¿Cuánto vale la frecuencia más baja?, ¿Qué representa dicho modo?
c) Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando ambos extremos están libres (atención: ¿cómo sería un "extremo libre" en esta configuración?) y escriba la solución general para la masa n.
d) Idem anterior, pero considerando que el extremo izquierdo está libre y el derecho fijo a la pared.
e) Particularice los resultados de los dos ítems anteriores para el caso en que N = 3.
f) A partir de la ecuación de movimiento, tome el límite continuo de la misma y muestre que dicha ecuación resulta ser una ecuación de ondas de la forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mathrm{v}_o^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Problema 2. Se tiene una cuerda de longitud L y densidad lineal de masa ρ_o sometida a una tensión T_o. Proponga como solución de la ecuación de ondas para un modo normal a la expresión:

$$\Psi(x,t) = A \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \theta)$$

Tome el sistema de coordenadas con x = 0 en un extremo de la cuerda y x = L en el otro. Encuentre la forma particular que adopta la solución propuesta en los siguientes casos:

a) $\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$ (ambos extremos están fijos).
b) $\Psi(0,t) = 0$ y $\partial\Psi / \partial x(L,t) = 0$ (un extremo está fijo y el otro está libre).
¿Imponer que un extremo se encuentre "libre" es equivalente a no imponer condiciones de contorno sobre ese extremo? ¿Cómo lograría un extremo "libre" para la cuerda?

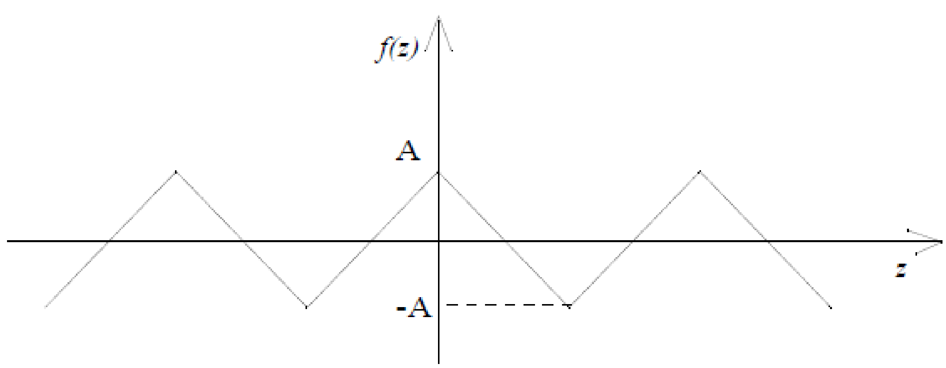
c) $\partial\Psi / \partial x(0,t) = 0$ y $\partial\Psi / \partial x(L,t) = 0$ (ambos extremos se encuentran libres). ¿A qué corresponde el modo de frecuencia mínima? ¿Cuánto vale la frecuencia de oscilación de ese modo?
d) Ahora tome un sistema de coordenadas con x = 0 en el centro de la cuerda. Halle la forma que adopta la solución general propuesta si $\Psi(-L/2,t) = \Psi(L/2,t) = 0$ (ambos extremos fijos).

Problema 3. Se tiene una cuerda de 20 cm de longitud y 5 g de masa, sometida a una tensión de 120 N, calcule sus modos naturales de oscilación. ¿Son todos audibles para el oído humano?

Problema 4. Las cuatro cuerdas de un violín emiten, estando libres, las notas sol2 (198/s); re3 (297/s); la3 (440/s) y mi4 (660/s). La primera es de aluminio (ρ_o =2.6 g/cm3 y diámetro d1 = 0.09 cm); las dos siguientes son de otro material (ρ_o =1.2 g/cm3) y diámetros d2 = 0.12 cm y d3 = 0.1 cm, y la cuarta es de acero (ρ_o =7.5 g/cm3) y diámetro d4 = 0.1 cm. Calcular las tensiones a las que deben estar sometidas con respecto a la primera.

Problema 5. Una cuerda de violín de 30 cm de longitud, emite la nota La3 (440/s), en su modo fundamental. Calcule las modificaciones que deben realizarse en la longitud para que dé las notas si3 (495/s), do3 (528/s) y re3 (594/s), todas en su modo fundamental.

Problema 6. Considere la función diente de sierra simétrica, entendiendo por tal a aquella función cuyos bordes anterior y posterior tienen la misma inclinación.



Sitúe el origen del sistema de coordenadas (z = 0) en una de las crestas y demuestre que la función tiene un desarrollo de Fourier de la forma:

$$f\left(z\right) = (8\,A/\pi 2)\ \{\ \cos(k_1 z) + \left(1/9\right)\ \cos(3\,k_1 z) + \left(1/25\right)\ \cos(5\,k_1 z) + \ldots\ \}$$

donde $k_1 = 2\pi/\lambda$ (con λ la longitud entre crestas del diente de sierra) y A es la amplitud del diente de sierra (2A es la diferencia entre los valores del máximo y del mínimo).

Problema 7. Obtenga el desarrollo en serie de Fourier de las siguientes funciones:

a)

$$F(z)=\begin{cases} 0 \quad \text{para } 0<z<\dfrac{L}{4} \\ A \quad \text{para } \dfrac{L}{4}<z<\dfrac{3L}{4} \\ 0 \quad \text{para } \dfrac{3L}{4}<z<L \end{cases}$$

b)

$$G(z)=\begin{cases} A \quad \text{para } 0<z<\dfrac{L}{2} \\ 0 \quad \text{para } \dfrac{L}{2}<z<L \end{cases}$$

Problema 8. Considere una cuerda de longitud L, de densidad de masa uniforme ρ_o sujeta en ambos extremos y sometida a una tensión T_o. En t = 0 la cuerda se suelta de modo que su forma está dada por la siguiente función:

$$\psi(x,0) = H(x) = \sin(\pi x/L) + (1/3)\sin(3\pi x/L) + (1/5)\sin(5\pi x/L)$$

(el sistema de coordenadas tiene x = 0 en un extremo de la soga, y x = L en el otro).

a) Halle $\psi(x,t)$

b) Grafique $\psi(x,t)$ para $\omega_1 t = 0$, $\pi/5, \pi/3$ y $\pi/2$. ¿Qué clase de simetría tiene $\psi(x,t)$ alrededor de $\omega_1 t = \pi/2$? ¿y alrededor de π?. ¿Cómo espera que sea $\psi(x,t)$ para $\omega_1 t = 2\pi$? (ω_1 es la frecuencia fundamental).

Problema 9. Considere una cuerda de longitud L, de densidad de masa uniforme ρ_o, sujeta en ambos extremos y sometida a una tensión T_o. En $t=0$ se la pone a vibrar aplicándole un golpe que, sin provocarle ninguna deformación, le imprime una velocidad dada por la siguiente expresión (si usamos el mismo sistema de coordenadas del problema anterior):

$$\dot{\Psi}(x,0) = P(x) = 4\sin(\pi x/L) - 0.45\sin(3\pi x/L) + 0.16\sin(5\pi x/L).$$

a) Obtenga $\psi(x,t)$

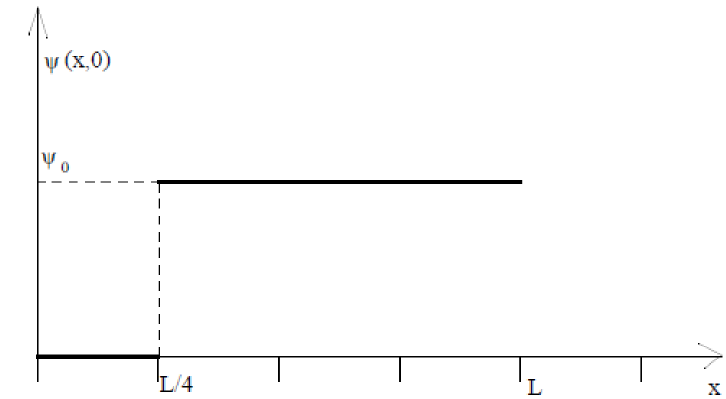
b) Grafique la posición del centro de la cuerda para $\omega_1 t$ entre $\pi/2$ y 2π. ¿Corresponde a una oscilación armónica?

Problema 10. Considere una cuerda de longitud L, de densidad de masa uniforme ρ_o, sometida a una tensión T_o, con un extremo fijo y el otro libre. Se le da a la cuerda la forma mostrada en la figura, y en $t=0$ se la suelta.

a) Usando el sistema de coordenadas indicado en la figura, halle $\psi(x,t)$

b) Graficar $\psi(x,t)$ para $\omega_1 t = 0$, $\pi/3$ y $\pi/2$

c) Si tomara un sistema de coordenadas con el origen en el extremo libre de la cuerda, diga qué es lo que cambiaría. ¿Es conveniente ese sistema?



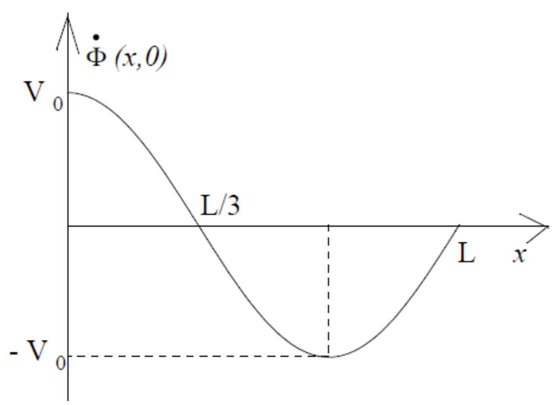
Problema 11. Considere una cuerda de longitud L, siendo T_o su tensión y ρ_o su densidad lineal. Sea $\Phi(x,t)$ la elongación de la cuerda.

a) Escriba la expresión más general que representa un modo normal en dicha cuerda, es decir, la expresión más general de una onda estacionaria.

b) Sabiendo que la cuerda tiene un extremo libre y otro fijo, y que el sistema de coordenadas con el que trabaja es tal que el extremo libre está en x= 0 y el extremo fijo está en x = L, imponga las condiciones de contorno y determine las constantes pertinentes.

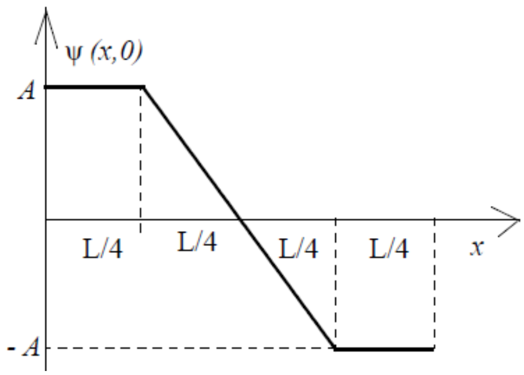
c) Usando la relación de dispersión, obtenga las posibles frecuencias temporales ν_n

d) Si $\Phi(x,0) = 0$ y $\dot{\Phi}(x,0) = V_o \cos\left(\frac{3\pi}{2L}\right)$, siendo $0 < x < L$, obtenga la amplitud y fase de cada modo y halle $\Phi(x,t)$.



Problema 12. Se tiene una cuerda de longitud L, siendo T_o su tensión y ρ_o su densidad lineal, con ambos extremos libres. En $t = 0$, la velocidad de todos los puntos de la cuerda es nula, y la deformación es la que se muestra en la figura.

Elija un sistema de coordenadas y halle $\psi(x,t)$. Describa cualitativamente el movimiento de los extremos de la cuerda en función del tiempo. Dicho movimiento, ¿corresponde a oscilaciones armónicas?



Problema 13. a) Dentro de un tubo hay un gas de coeficiente de compresibilidad K y densidad ρ_o ¿cuál es la velocidad de propagación de las ondas en el tubo?

b) Se tiene un mol de N_2 (gas ideal) a una temperatura de 300º K, y a presión atmosférica. Calcule el coeficiente de compresibilidad del N_2 y la velocidad de propagación de las ondas (Datos: R, PM).

Problema 14. Se tiene un tubo de longitud L. Considere las siguientes posibilidades:
I) Está cerrado en ambos extremos, lleno de aire en su interior.
II) Tiene un extremo cerrado y el otro abierto.
III) Ambos extremos están abiertos.
Datos: velocidad de propagación de las ondas v_s, L, P_0, $\rho_o = \gamma P_0 / v_s^2$.

Hallar, para cada una de dichas situaciones:
a) las posibles longitudes de onda con las que puede vibrar el aire en el tubo, y sus correspondientes frecuencias.
b) Elija un sistema de referencia conveniente, y escriba la expresión más general para el desplazamiento de las partículas $\psi(x,t)$. En dicha expresión, ¿qué parámetros conoce? ¿De qué dependen los parámetros que no conoce?
c) A partir de la expresión hallada en b), deducir la expresión de $\delta p(x,t)$ y $\rho(x,t)$

Problema 15. a) ¿Qué longitud debe tener un tubo de órgano abierto en ambos extremos para que produzca en el aire un sonido de 440 Hz?
b) ¿Qué longitud deberá tener un tubo de órgano cerrado en uno de sus extremos para que produzca el mismo tono en su primer armónico?

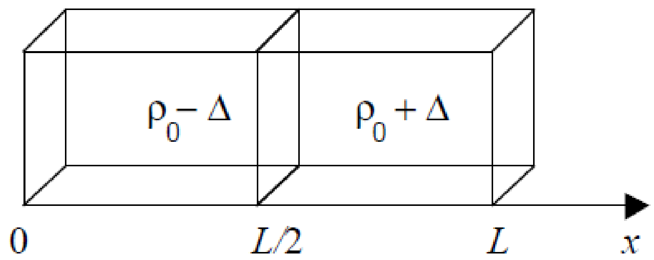
Problema 16. Se tiene un tubo de longitud L en ambos extremos como se indica en la figura. El tubo presenta un tabique ubicado en la mitad del tubo. De un lado del tabique hay un gas que presenta una densidad $\rho_o + \Delta$, y del otro lado hay un gas de densidad $\rho_o + \Delta$ (considere $\Delta << \rho_o$). Todo el gas se encuentra en reposo. En $t = 0$ se quita el tabique y se deja evolucionar al sistema.
a) Escriba la expresión para un modo normal $\psi_n(x,t)$ en el tubo, imponiendo las condiciones de contorno. ¿Cuáles son las longitudes de onda permitidas? (ψ es el desplazamiento de los elementos del gas).

b) Escriba la expresión de $\rho(x,0)$ y de $\psi(x,0)$; y grafíquelas. Sugerencia: hallar $\psi(x,0)$ a partir de $\rho(x,0)$, y usando las condiciones de contorno.

c) Usando las condiciones iniciales, halle $\psi(x,t)$. Calcule $\rho(x,t)$

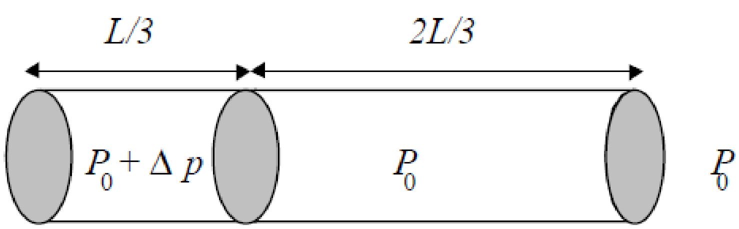
d) Halle $\rho(x, L/\mathrm{v})$ y $\rho(x, 2L/\mathrm{v})$; compárelas con $\rho(x,0)$

Datos: ρ_o, Δ, L, v = velocidad del sonido en el gas.



Problema 17. Se tiene un tubo dividido en dos regiones separadas por un tabique (ver figura). En una de ellas se tiene una presión $P = P_0 + \Delta p$ (constante). La otra región está abierta a la atmósfera, teniendo presión P_0. En t = 0 se remueve el tabique. Hallar $\delta p(x,t)$, $\psi(x,t)$, $\delta\rho(x,t)$

Datos: P_0, $\Delta p << P_0$, L, v = velocidad del sonido en el gas, γ.



Sistemas Forzados

Problema 18. Se tiene una cuerda ideal de longitud L y densidad lineal de masa ρ_o sometida a una tensión T_o. Un extremo de la cuerda está fijo. Analice las oscilaciones transversales de dicha cuerda $\psi(x,t)$ cuando:

i) El extremo libre es excitado por una amplitud $A_o \cos(\omega t)$

ii) el extremo libre es excitado por una fuerza externa transversal $F_o \cos(\omega t)$.

Para ambos casos, resuelva los siguientes ítems:
(a) Encontrar el régimen permanente (régimen asintótico a tiempos largos después de iniciada la excitación) del problema.
(b) Encontrar las frecuencias de resonancia.

(c) Discutir la necesidad (o no) de incluir una pequeña fuerza de rozamiento para alcanzar el régimen permanente y la validez de la solución hallada en un experimento real

Problema 19. Se tiene una cuerda ideal de longitud L y densidad lineal de masa ρ_o sometida a una tensión T_o. Ambos extremos de la cuerda están fijos. Analice las oscilaciones transversales de dicha cuerda $\psi(x,t)$,

a) si en la mitad de la misma, se ejerce una fuerza armónica.
b) si en $x = 2L/3$ se ejerce una fuerza armónica.

Describa el comportamiento del sistema en ambos casos. ¿Qué se observa al variar la frecuencia de excitación?

Problema 20. Se tiene un tubo cerrado en uno de sus extremos; su longitud es menor que 1 m. Se acerca al extremo abierto un diapasón que está vibrando con v = 440 Hz. Considere v_s = 330 m/s.
a) Hallar las posibles longitudes del tubo para que haya resonancia. Para cada una de ellas, ¿en qué modo está vibrando el aire contenido en el tubo?
b) Repetir a), si el tubo está abierto en ambos extremos.
6) Un tubo de 1 m de longitud está cerrado en su parte inferior. Un hilo extendido se coloca sobre el lado abierto del tubo. El hilo tiene 30 cm de longitud y una masa de 0.01kg. Fijado en dos extremos, el hilo vibra en su modo fundamental excitando una resonancia en la columna de aire del tubo. Lo hace vibrar en su frecuencia fundamental. Calcular:
a) la frecuencia de oscilación de la columna de aire.
b) la tensión del hilo.