Física 2. Cátedra Vera Brudny
Guía 4 Oscilaciones en sistemas continuos no limitados en el espacio

A) Propagación en medios no dispersivos

Problema 1. a) Verifique si las siguientes expresiones matemáticas cumplen la ecuación de las ondas unidimensional. Grafique las funciones dadas.

i) $\Psi_y(y,t) = y_o exp(-\lambda(y-\mathrm{v}t)^2)$

ii) $\Psi_y(x,t) = \beta(x+\mathrm{v}t))$

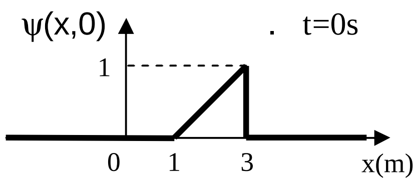
iii) $\Psi_y(x,t) = y_o \sin(k(x-\mathrm{v}t))$

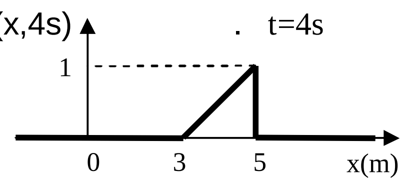
iv) $\Psi_y(x,t) = y_o \sin^2(kx-\omega t)$

v) $\Psi_y(x,t) = y_o \cos(kx)\sin(\omega t)$

b) En aquellas expresiones que satisfacen lo requerido en a), indique si no existe contradicción con la afirmación de que una onda es siempre función de (x $\pm$ vt).

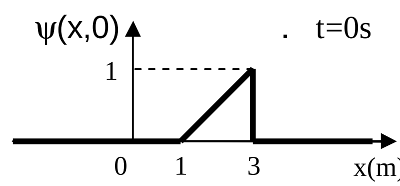
Problema 2. Se tiene una perturbación que se propaga en una cuerda infinita con velocidad v. Se toman dos "fotografías" de la perturbación, en t = 0s y en t = 4s:





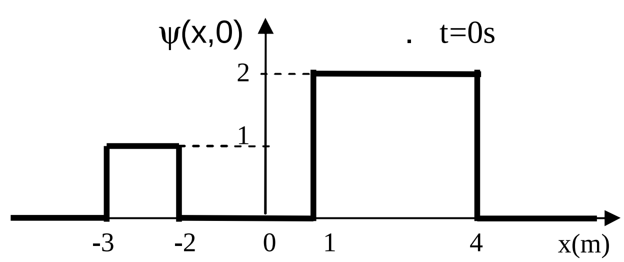
a) Hallar v.
b) Hallar $\psi(x,t)$.

Problema 3. Se tiene una cuerda infinita. Se sabe que la velocidad de propagación de las ondas en ella es v = 100 m/s (consideramos que dicha cuerda es un medio no dispersivo). En t = 0 se la deforma de la manera que se indica en la figura, y se la suelta (desde el reposo).



a) Hallar $\psi(x,t) = \psi_1(x - \mathrm{v}t) + \psi_2(x + \mathrm{v}t)$. Dar explícitamente (en cada intervalo de interés) la expresión de $\psi(x,t)$.
b) Comparar esta situación con la del problema anterior.

Problema 4. Se tiene una cuerda infinita, siendo la velocidad de propagación de las ondas en ella v = 100 m/s (medio no dispersivo). En t = 0 se la deforma de la manera que se indica en la figura, y se la suelta desde el reposo.
Hallar $\psi(x,t) = \psi_1(x - \mathrm{v}t) + \psi_2(x + \mathrm{v}t)$.



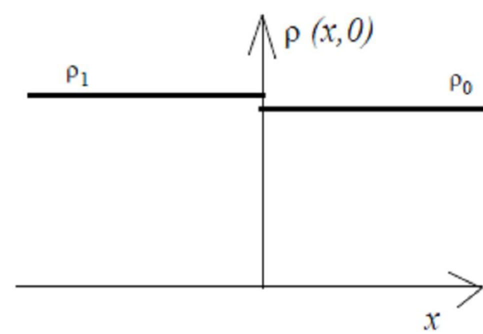
Problema 5. Se propaga una onda armónica plana en el aire, cuya frecuencia es ν y cuya amplitud de elongación es A; la onda viaja hacia x > 0. Se sabe que la presión atmosférica (media) es p_0.

a) Escribir $\psi(x,t)$ (desplazamiento de las partículas), en la forma más general posible.
b) A partir de $\psi(x,t)$, hallar $\delta p(x,t)$ (presión en cada punto, tomando como referencia la atmosférica). ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas? ¿Cuánto vale la amplitud de presión?
c) Hallar $\rho(x,t)$ (densidad). ¿Cuánto vale su amplitud?
d) Calcular las energías cinética y potencial instantáneas por unidad de volumen.
e) Hallar el valor medio temporal de dichas energías y el vector flujo de energía J .
f) Hallar el nivel de intensidad.
Datos: A, ν, vsonido, p_0, $\gamma = Cp/Cv$.

Problema 6. Considere una onda armónica plana propagándose en aire, siendo su amplitud de presión $\delta p_0 = 2$ N/m^2 y su frecuencia 300 Hz. La onda se propaga hacia x > 0. Hallar:

a) las energías cinética y potencial por unidad de volumen en valor medio temporal.
b) el vector flujo de energía J
c) el nivel de intensidad (en db). Tomar como referencia para este cálculo: $j_0 = 10^{-12}$watt/m2.
Datos: $\delta p_0 = 2$ N/m^2, $\nu = 300$ Hz, $v_{sonido} = 330$ m/s, $\gamma = Cp/Cv \approx 1.4$, $P_0 = 1$ atm.

Problema 7. En un gas a t = 0, se produce la perturbación indicada en la figura.
Sabiendo que $(\rho_1 - \rho_0)/\rho_0 << 1$ y que v(x,0) = 0, calcule $\rho(x,t)$.
Datos: ρ_1, ρ_0, vs (velocidad de propagación de las ondas en el gas).

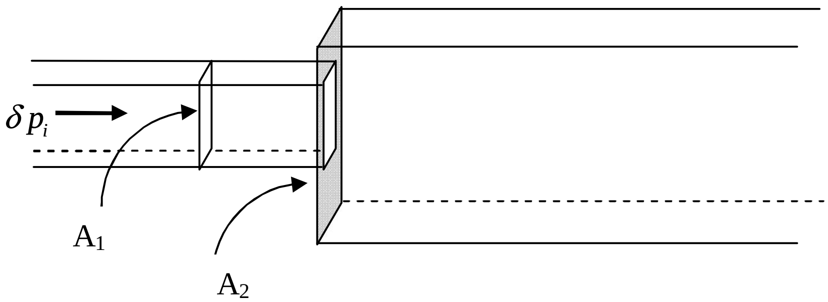


B. Reflexión y transmisión de ondas

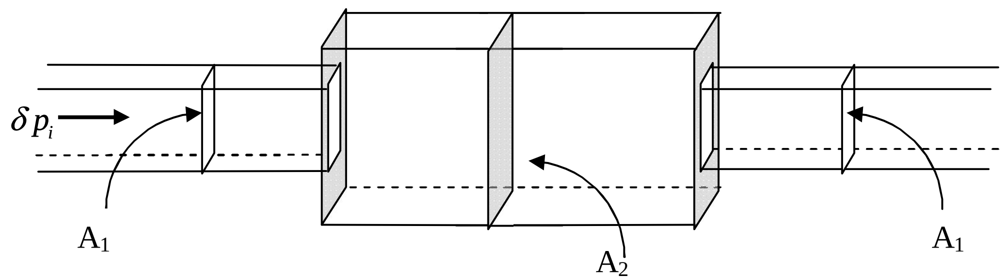
Problema 8. Se tienen dos cuerdas semi-infinitas, de densidades lineales ρ_1 y ρ_2, unidas en un punto. El sistema está sometido a una tensión T. Sobre la primera cuerda (la de densidad ρ_1) incide una onda de la forma: $\phi_i(x,t) = A_i \cos(k_1 x - \omega t)$. Se conocen: ρ_1 , ρ_2 , T, ω y A_i.

a) Calcule k_1 y k_2, es decir, los números de onda de cada lado de la unión.
b) Plantee la solución más general para $\phi(x,t)$ de cada lado de la unión.
c) ¿Qué condiciones deben verificarse en el punto de unión de las cuerdas?
d) Usando b) y c), calcule la perturbación $\phi(x,t)$ en cada una de las cuerdas.

Problema 9. Se tienen dos caños semi-infinitos de distinta sección y unidos, como se muestra en la figura. Una onda acústica de la forma
$\delta p_i(x,t)=A_i\cos(k_1x-\omega t)$ incide desde el primer caño hacia x > 0.
Hallar las amplitudes de presión y elongación de las ondas reflejadas y transmitidas.
Datos: A_1, A_2, presión media P_0, densidad media ρ_0, vs, ω, A_i. Suponer despreciables los efectos de la viscosidad.



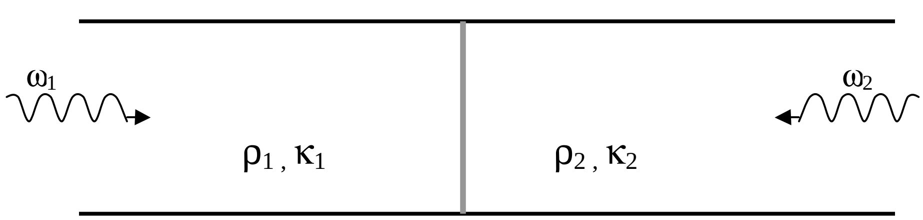
Problema 10. Considere la siguiente configuración:



Suponga que desde la izquierda incide una onda cuya expresión es la misma del problema anterior (las secciones y el resto de los datos son los mismos también). Hallar $\delta p(x,t)$ y $\psi(x,t)$ en cada tramo.

Problema 11. Un tubo de longitud infinita se encuentra dividido en dos partes por una membrana elástica como se muestra en la figura. Cada mitad contiene un gas diferente. Desde el extremo de la izquierda incide una onda de frecuencia ω_1 de la forma: $\psi_{1,inc}(x,t) = A_1 Exp[i(k_1 x - \omega_1 t)]$. Otra onda de frecuencia ω_2, cuya forma es $\psi_{2,inc}(x,t) = A_2 Exp[i(-k_2 x - \omega_2 t)]$, incide desde el extremo derecho propagándose en sentido opuesto a la anterior.

a) ¿Cuál es la relación de dispersión que satisfacen las ondas en cada uno de los gases?
b) Escriba la forma de las funciones que representan el desplazamiento total de cada uno de los gases.
c) Indique que condiciones debe satisfacer la función de desplazamiento sobre la membrana.
d) Calcule los coeficientes de transmisión y reflexión en la membrana
e) Calcule la densidad del gas dentro del tubo como función de la posición y del tiempo.



C. Propagación de paquetes de onda (transformada de Fourier)

Problema 12. En lo que sigue, encuentre con cuál de estos métodos se determina la velocidad de fase y con cuál la de grupo.

a) Medir la velocidad del sonido en el aire, golpeando las manos y determinando el tiempo que transcurre entre el aplauso y el eco de un reflector ubicado a una distancia conocida.
b) Medir la longitud de un tubo que resuena a una frecuencia conocida (y corregir por efectos de borde).
c) Determinar la velocidad de la luz midiendo el tiempo que tarda un haz colimado en recorrer una distancia conocida.
d) Encontrar la longitud de una cavidad resonante que oscila en un modo conocido a una frecuencia conocida.

Problema 13. Si $\Psi(\omega)$ corresponde a un espectro de frecuencias cuadrado, o sea $\Psi(\omega) = 1/\Delta\omega$ para ω comprendida en el intervalo de ancho $\Delta\omega$ alrededor de ω_0 , y cero en otra parte, vea que $\phi(t)$ está dada por:

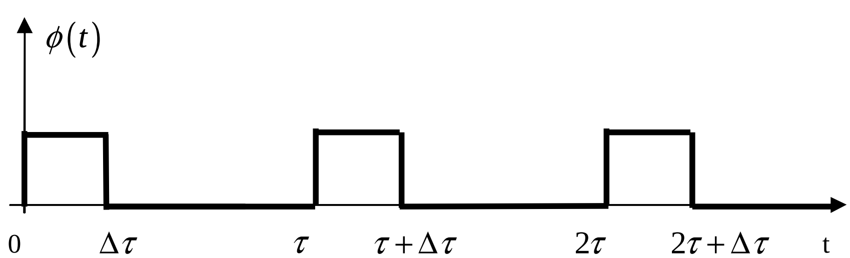
$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{sen(t\Delta\omega/2)}{t\Delta\omega/2}\right]e^{i\omega_0 t}$$

a) Grafique $\Psi(\omega)$ y $|\phi(t)|$.
b) Sea T un tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear.
Muestre que si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño como para que $\Delta\omega$ T<< 1, entonces durante un tiempo menor que T, $\phi(t)$ es una función armónica de amplitud y fase casi constante.
c) Explique <u>cualitativamente</u> como cambian estos resultados si el medio es dispersivo.

Problema 14.
a) Muestre que si $\phi(t)$ es una función real, puede escribirse a partir de su transformada de Fourier $\psi(\omega) = B(\omega)+i\, A(\omega)$ como

$$\phi(t) = \int B(\omega)\ \cos\ \omega t\ d\omega + \int A(\omega)\ \sin\ \omega t\ d\omega$$

b) Tomemos una pulsación que se repite N veces:



vea que:

$$\mathrm{F}\left(\sqcap_{n\tau}^{(n+1)\tau}\right) = e^{in\phi}\,\mathrm{F}\left(\sqcap_{0}^{\tau}\right)$$

c) Calcule la transformada de la pulsación cuadrada que se repite durante un tiempo largo $T_{largo} = N\tau$.
d) Muestre que para un valor finito de T_{largo} el análisis de Fourier de esta pulsación cuadrada repetida casi periódicamente, consiste en una superposición de armónicos casi discretos de la frecuencia fundamental $\nu_1 = (1/T_1)$, siendo realmente cada armónico un continuo de frecuencias que se extiende sobre una banda de ancho $\delta\nu \approx 1/T_{largo}$. Las armónicas más importantes caen entre 0 y $\Delta\nu = 1/\Delta t$.
e) ¿Por qué vale $\Delta\nu\ \Delta t \approx 1$?.
Ayuda: Tenga en cuenta que la transformada de Fourier es lineal

Problema 15. Se tienen dos cuerdas semi-infinitas de distinta densidad lineal de masa, ρ_1 y ρ_2, unidas en un punto y sometidas a una tensión T. Sobre la primera se propaga **hacia la derecha** una perturbación de la forma indicada en la figura, la cual en t = 0 llega al punto de unión de las cuerdas.
Se conocen ρ_1 , ρ_2 , T, L y h. También se considera que los medios son no dispersivos.

a) Hallar el desplazamiento ψ y la velocidad de las partículas de la cuerda en t=0.
b) Calcular $\psi(x,t)$. Muestre que las perturbaciones transmitida y reflejada no están deformadas.
c) Explique <u>cualitativamente</u> como cambian estos resultados si el medio es dispersivo.