FÍSICA TEÓRICA 1 - 1er. Cuatrimestre 2010

Guía 3: Inducción, cuasiestacionario, conductores y teoremas de conservación

1. Se tiene una espira circular de radio a, resistencia R, y coeficiente L de autoinducción, perpendicular a un campo magnético uniforme. Si el campo se apaga exponencialmente, es decir
$$B(t) = B_0 e^{-t/\tau}$$
donde τ es una constante de tiempo, calcular la corriente $I(t)$ inducida en la espira.

2. Un solenoide infinito de radio a y n vueltas por unidad de longitud está recorrido por una corriente de la forma $I = I_0 \sin(\omega t)$. Calcular el campo electromagnético en todo el espacio utilizando la aproximación cuasiestacionaria.

3. En la práctica, un solenoide es en realidad una hélice, con n espiras por unidad de longitud. Puede asumirse que la corriente total es la superposición de una longitudinal y una transversal. Considerando que la corriente varía en el tiempo como $I = I_0 \cos(\omega t)$:

   a) Encuentre las componentes longitudinal y transversal de la corriente.

   b) En la aproximación cuasiestacionaria calcule los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en todo el espacio.

4. Un condensador está formado por dos placas circulares de radio a, separadas por una distancia h mucho menor que a. El condensador está conectado a un circuito por el que circula una corriente $I = I_0 \sin(\omega t)$. Despreciando efectos de borde, calcule iterativamente los campos eléctrico y magnético dentro del capacitor haciendo un desarrollo en series de potencias de ω. Identifique la función de Bessel a la que corresponde cada serie. Referencia: Feynman Vol. 2, sec. **23.2**.

5. Por un conductor cilíndrico, macizo, de radio a, $\mu = \varepsilon = 1$ y conductividad σ circula una corriente alterna del tipo $I = I_0 \cos(\omega t)$. Bajo la aproximación cuasiestacionaria, calcule:

   a) Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en el interior del conductor.

   b) La densidad de corriente $\mathbf{j}$ y el promedio temporal de la potencia por unidad de longitud disipada por efecto Joule.

   c) Estudie cualitativamente los casos límites de la distribución de $\mathbf{j}(\mathbf{r})$cuando $\delta/a \gg 1$ y $\delta/a \ll 1$, donde δ es el espesor pelicular o ¨skin depth¨. Referencia: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, sec. **60** [The skin effect] en la versión en inglés; sec. **46**, [Efecto pelicular] en la edición española de ed. Reverté.

6. Se tiene una cáscara esférica conductora de radio interior a y radio exterior b, caracterizada por una conductividad σ y una constante dieléctrica ε. Sobre la cara interior de la cáscara se ha depositado una densidad superficial de carga uniforme Σ. Si a $t = 0$ se permite que el sistema evolucione,

   a) Encontrar el campo eléctrico, la densidad de corriente y la densidad de carga como funciones del tiempo.

   b) Encontrar la evolución de la energía en función del tiempo, y demostrar que la variación de energía (entre $t = 0$ y $t = \infty$) es igual a la energía disipada por efecto Joule.

7. *Corrientes de Foucault*: Se coloca una esfera de radio a y conductividad σ en un campo magnético externo variable $\mathbf{B}_{ext} = \mathbf{B}_e\, e^{-i\omega t}$, que puede considerarse uniforme, no sólo al infinito sino dentro de la esfera. Bajo la aproximación cuasiestacionaria y de buen conductor, calcular la potencia que se disipa en la esfera como consecuencia de las corrientes de Foucault que se inducen en ella. ¿Qué condición asegura que el campo magnético externo pueda considerarse uniforme en todo el espacio? Para el caso más general ver Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, sec. **59** en la versión en inglés [Depth of penetration of a magnetic field into a conductor] o sec. **45** [Corrientes de Foucault] en la versión española, a partir de la ec. 45.12.

8. *Movimiento de un conductor en un campo magnético*: Una esfera de radio a y conductividad σ gira con velocidad angular ω uniforme alrededor de uno de sus diámetros ($4\pi\sigma \gg \omega$), que es perpendicular a un campo magnético externo estático y uniforme. Calcular los campos eléctrico y magnético dentro del conductor en la aproximación en que el movimiento del conductor es no relativista. *Sugerencia*: Pasar a un sistema fijo al conductor, en cuyo caso a primer orden en v/c los campos se transforman según:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

de tal modo que el problema se convierte en el de un conductor quieto en un campo externo variable (despreciando la excitación de corrientes por aceleración, que aparecen en el orden siguiente). Referencia: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, sec. **63** en la versión en inglés [Motion of a conductor in a magnetic field] o sec. **49** de la versión española; también, Panofsky y Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, sec. **9-3**.

9. *Inducción unipolar*: Un imán esférico con $\mathbf{M} = M_0\hat{z}$ gira con velocidad angular $\omega = \omega\hat{z}$. Calcular la fuerza electromotriz inducida que aparece entre los extremos de un conductor, conectados al polo y al ecuador. *Sugerencia*: ídem problema anterior.

10. Utilizar el tensor de Maxwell para encontrar:

    a) La fuerza entre dos cargas iguales, que pueden ser del mismo signo o no.

    b) La fuerza por unidad de longitud con que interactúan dos cables paralelos muy largos, por los que circulan corrientes iguales. Considere los dos casos: sentidos iguales y sentidos opuestos de circulación.

11. Una esfera conductora de radio a, está conectada a potencial V. Calcular la fuerza que tiende a separar sus dos hemisferios usando el tensor de Maxwell. Comparar con el resultado obtenido a partir de la fuerza de Lorentz. Si la esfera está aislada y tiene carga Q: sin hacer ningún otro cálculo, ¿cuál es la fuerza que tiende a separar sus hemisferios?

12. Una esfera conductora de radio a, descargada, está ubicada en un campo eléctrico externo, uniforme al infinito.

    a) Calcular la fuerza que tiende a separar sus dos hemisferios (definidos por el plano ecuatorial perpendicular al campo externo).

    b) ¿Cómo se modifica la fuerza calculada en el punto anterior si la esfera tiene carga Q? ¿Puede obtenerse este resultado sumando a la fuerza obtenidad en el ítem anterior la fuerza calculada en la segunda parte del problema 11?

13. Un capacitor de placas circulares paralelas se carga lentamente. Mostrar que el flujo del vector de Poynting a través de la superficie lateral es igual al incremento por unidad de tiempo de la energía almacenada. Despreciar efectos de borde.

14. Calcular la presión que experimenta la superficie lateral de un solenoide largo y recto de radio a y n vueltas por unidad de longitud recorrido por una corriente constante I. Analizar también, en la aproximación cuasiestacionaria, el caso en que $I = I_0 \sin(\omega t)$, mostrando que la variación en la energía del campo magnético en el solenoide es igual al flujo del vector de Poynting a través de su superficie lateral.

15. Un solenoide infinito tiene radio a y n vueltas por unidad de longitud.

    a) En el caso que ilustra la figura 1, el solenoide transporta una corriente constante I_0. Use el tensor de Maxwell para encontrar la fuerza por unidad de longitud que se ejerce sobre un sector del solenoide definido por los ángulos $\phi = 0$ y $\phi = \phi_1 \leq 2\pi$. ¿Cuál es la presión sobre el solenoide?

    b) Suponga ahora que la corriente es $I = I_0 \operatorname{sen} \omega t$. El teorema de Poynting asegura que

$$\frac{d}{dt}\left(E_{\text{mec}} + E_{\text{campos}}\right) = -\oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}\, da, \tag{1}$$

    donde $dE_{\text{mec}}/dt = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\, d^3x$, $E_{\text{campos}} = (8\pi)^{-1} \int_V (E^2 + B^2)\, d^3x$ y $\mathbf{S} = (4\pi)^{-1} c\, \mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Hasta primer orden en la aproximación cuasiestacionaria, verifique explícitamente que se cumple el teorema de Poynting en los dos volúmenes cilíndricos de altura l indicados en la figuras 2 y 3 respectivamente, uno de radio apenas menor que a y otro de radio apenas mayor.

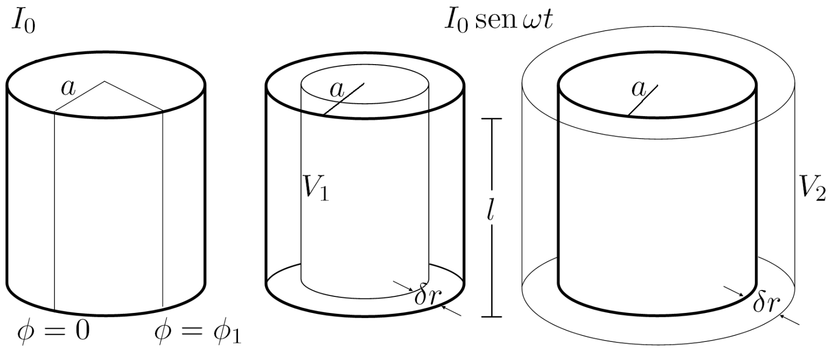

fig. 1 fig. 2 fig. 3

16. Calcular el momento angular del campo electromagnético del sistema formado por dos cáscaras esféricas metálicas concéntricas, de radios a y b respectivamente, con carga $+q$ en la esfera interior y $-q$ en la exterior, y un dipolo magnético $\mathbf{m}$ en el centro de las esferas.

Preguntas Molestas

1. ¿Siguen valiendo los mismos argumentos de simetría para los campos eléctrico y magnético en el caso dinámico?

2. ¿Cuál es la idea de resolver problemas dinámicos mediante la aproximación cuasiestacionaria? ¿Qué ventajas presenta?

3. Supongamos un problema en el que se plantea calcular el $\mathbf{B}^{(1)}$ que resulta de un $\mathbf{E}^{(0)}$radial. Según lo que se sabe de la guía de repaso, por simetría, $\mathbf{B}^{(1)} = 0$. Ahora bien, entonces: $0 = \nabla \times \mathbf{B}^{(1)} = f(r)\hat{r} \neq 0$ donde $f \propto \partial_t E$. ¿Dónde falla el razonamiento? Esta dificultad debería haber surgido en el problema 6.

4. El $\mathbf{E}^{(1)}$del problema 3 tiene componentes que van como $\ln(r)$ en el exterior de la distribución. Por lo tanto, para r suficientemente grande, el campo eléctrico crece sin límite. ¿Es correcto concluir que el campo eléctrico diverge en el infinito?

5. En el problema 8, una vez que uno pasa a un sistema fijo al conductor, ¿puede suponerse que el régimen es cuasiestacionario? Justificar.

6. ¿Qué diferencia hay entre calcular la fuerza sobre una distribución dada usando el tensor de Maxwell y la fuerza de Lorentz?

7. ¿En qué casos puede calcularse la fuerza sobre una distribución integrando el flujo del tensor de Maxwell?

8. De qué manera conviene tomar los ejes de coordenadas en un punto dado, para que el tensor de Maxwell (eléctrico o magnético) sea diagonal en esa base? ¿Cómo ayuda esto para elegir la superficie de integración?

9. ¿Cuál es la solución de la paradoja de Feynman? (ver Feynman Vol. 2, sec. **17-4**.)