FÍSICA TEÓRICA 1 - 1er. Cuatrimestre 2010

Guía 6: Radiación.

1. Una partícula no relativista de carga Ze, masa m, y energía cinética E choca con parámetro de impacto igual a cero con un campo de fuerzas fijo y central. La interacción es repulsiva y está descripta por un potencial $V(r)$, el cual es mayor que E a distancias cortas.

   (a) Mostrar que la energía total radiada está dada aproximadamente por

   $$\Delta W = \frac{4}{3}\frac{Z^2e^2}{m^2c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\min}}^{\infty}\left|\frac{dV}{dr}\right|^2 \frac{dr}{\sqrt{V\left(r_{\min}\right)-V(r)}}$$

   donde $r_{\min}$ es la menor distancia de mínimo acercamiento en el choque. (Jackson)

   (b) Si la interacción es Coulombiana, o sea, $V(r) = \frac{ZZ'e^2}{r}$, mostrar que la energía total irradiada es

   $$\Delta W = \frac{8}{45}\frac{Zmv_0^5}{Z'c^3}$$

   donde v_0 es la velocidad de la carga en infinito. (Jackson)

   (c) Un positrón incide frontalmente sobre un protón desde distancias muy alejadas, con velocidad $v_i \ll c$, llegando hasta una distancia de mínimo acercamiento al protón y luego retrocediendo sobre la misma trayectoria rectilínea, alcanzando asintóticamente una velocidad $v_f < v_i$. Estimar v_f en función de v_i a partir del cálculo de la radiación electromagnética emitida en el proceso, despreciando el movimiento del protón. ¿Cómo está polarizada la radiación electromagnética producida, observada en regiones muy alejadas del lugar de emisión?

2. (a) Una partícula cargada efectúa un movimiento circular uniforme con frecuencia ω. En la aproximación no relativista, calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ completos. Para los campos de radiación, calcular el valor medio temporal de la distribución de potencia y la intensidad total irradiada por ciclo, y analizar la polarización del campo en distintas direcciones

   (b) Una partícula de carga $-e$ y masa m gira alrededor de otra mucho más pesada de carga Ze. El radio de la órbita circular es inicialmente R. Estimar el tiempo que tarda la partícula en caer al centro de la órbita debido a la pérdida de energía por radiación y estimar el número de vueltas que realiza antes de caer.

3. **Dispersión de Thomson**. Cuando una onda plana incide sobre un electrón libre, el electrón oscila e irradia ondas electromagnéticas, provocando una dispersión en todas direcciones de la onda original. Calcular la sección eficaz de dispersión suponiendo que la onda incidente es linealmente polarizada, que el movimiento del electrón es no-relativista, y despreciando el impulso transferido al electrón en la dirección de propagación de la onda. Resolver primero la ecuación de movimiento del electrón sometido al campo eléctrico de la onda incidente, y encontrar luego los campos de radiación debidos al movimiento del electrón. Calcular entonces la sección eficaz diferencial (por unidad de ángulo sólido) definida como:

   $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Potencia irradiada por el electrón por unidad de ángulo sólido}}{\text{Flujo de energia incidente de la onda plana}}$$

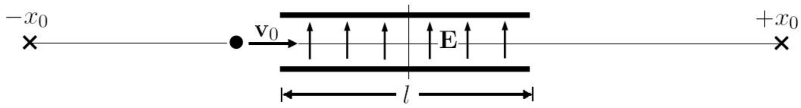
   y la sección eficaz total, $\sigma = \int d\Omega\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$. ¿Cómo cambian los resultados si el electrón está ligado en un potencial armónico de frecuencia ω_0? ¿Qué pasa cerca de una resonancia?

4. Una carga q realiza un movimiento armónico sobre el eje z, $z(t') = a\cos(\omega_0 t')$. Mostrar que la potencia instantánea irradiada por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dP\left(t'\right)}{d\Omega} = \frac{e^2 c\beta^4}{4\pi a^2} \frac{\sin^2\left(\theta\right)\cos^2\left(\omega_0 t'\right)}{\left[1+\beta\cos\left(\theta\right)\sin\left(\omega_0 t'\right)\right]^5}$$

donde $\beta = a\omega_0/c$. (Jackson)

5. Una partícula relativista de carga q y masa m pasa a través de un capacitor de placas paralelas de longitud l. El campo $\mathbf{E}$ en el interior del capacitor es homogéneo y constante. La partícula ingresa al capacitor con una velocidad $\mathbf{v}_0$ perpendicular a $\mathbf{E}$ y paralela a las placas, y viaja tan rápido que su desviación puede despreciarse.



   a) Demuestre que para una partícula de masa m y carga q

$$m\gamma(\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}} = q\left[\mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{v}\times\mathbf{B} - c^{-2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{v}\right].$$

   b) Calcule la energía total irradiada durante el paso de la partícula por el capacitor.

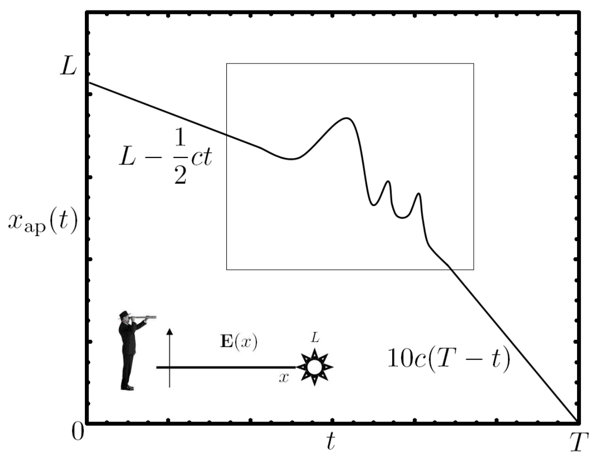
   c) Escriba la expresión del campo eléctrico de radiación y grafíquelo cualitativamente en función del tiempo para los puntos $-x_0$ y x_0, que se encuentran sobre la línea que sigue la partícula, simétricos respecto del centro del capacitor y muy alejados de éste. Tenga especial cuidado en el cálculo de los intervalos temporales en que ese campo es distinto de cero.

6. Un observador está en el origen de coordenadas. A una distancia L hay una fuente de partículas de masa m y carga q. El observador tiene un reloj y puede ver la posición de las partículas emitidas por la fuente a través de un telescopio. El observador registra la posición $x_{\rm ap}(t)$ de una partícula, tal como él mismo la ve, en función del tiempo t marcado por su propio reloj. El resultado de estos registros es la gráfica de la figura (no a escala). En la gráfica están indicadas las formas que adopta $x_{\rm ap}$ fuera de la zona recuadrada.

   a) Teniendo en cuenta los efectos del retardo, encuentre la posición $x(t)$ de la partícula como función del tiempo en las regiones fuera de la zona recuadrada en la figura.

   b) Encuentre las energías de la partícula al dejar la fuente y al llegar al observador.

   c) Asumiendo que entre la fuente y el observador, y dirigido según la línea que los une, hay un campo eléctrico estático, encuentre su promedio espacial a lo largo de la trayectoria de la partícula.



7. Un dipolo eléctrico rota en el plano xy con frecuencia ω. Calcular la componente z del momento angular del campo electromagnético que atraviesa la superficie de una esfera de radio R centrada en el dipolo, usando que
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = c \int (\mathbf{r} \times \mathbf{g})\, R^2 d\Omega \qquad \text{(Panofsky §14)}$$
siendo $\mathbf{g} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \,/\, (4\pi c)$ la densidad de momento lineal. Calcular también la potencia total irradiada, y el cociente entre el valor de L_z y de la energía que atraviesan por unidad de tiempo la superficie, promediados sobre un período de rotación del dipolo. Discutir este resultado interpretando la radiación como compuesta por fotones de energía $\hbar\omega$ cada uno.

8. Dos cargas $+q$ y $-q$, separadas una distancia d, realizan una trayectoria circular en el plano $x - y$ con frecuencia ω, $d \ll c/\omega$. Calcular la distribución de potencia y la potencia total irradiada. ¿A qué orden multipolar corresponde?

9. Una esfera de radio a con magnetización uniforme $\mathbf{M}$ rota con velocidad angular constante alrededor de un eje que pasa por el centro de la esfera y forma un ángulo α con $\mathbf{M}$.

   (a) Calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, la distribución angular de potencia y la intensidad total irradiada por período.

   (b) Analizar el flujo de $\mathbf{L}$ que se lleva el campo.

   (c) A una distancia $d \gg a$ sobre el eje z se coloca un molinito con una paleta totalmente absorbente y otra totalmente reflectante. Calcular el torque inicial sobre el eje del molinito. ¿Qué aproximaciones es necesario hacer (al menos 3)?

10. **"Magnetars".** El pulsar SGR 1806-20 rota con un período $T = 7{,}5$s (esto es una velocidad de 30.000 km/h en su superficie). La velocidad de frenado de esta rotación es inusualmente alta en términos astronómicos, siendo $\dot{T} = 8 \times 10^{-11}$. Calcule el máximo campo magnético sobre la superficie del pulsar, asumiendo que su masa y su radio son los típicos de este tipo de estrellas ($m = 1{,}4 M_\odot = 2{,}8 \times 10^{30}$ kg, $r = 10$ km) y que el frenado en la rotación se produce debido a la pérdida de energía por radiación. Suponga además que la velocidad angular es perpendicular al momento magnético de la estrella. [K. T. McDonald, "Magnetars", Am J. Phys. **68** (2000) 775.]

11. Se tiene un conductor recto y delgado de longitud l alimentado por una fuente de frecuencia ω localizada en su centro. Se desprecia la resistencia. Calcular la potencia irradiada por unidad de ángulo sólido y la potencia total irradiada. Determinar en qué dirección es mínima la radiación y cómo es la polarización de la radiación en esa dirección.

12. Resuelva el problema anterior pero en el caso de tener una espira circular de radio a con corriente $I = I_0 \sin(\omega t)$.

13. **Ley de Biot y Savart revisada.** Un hilo de corriente se encuentra sobre el eje x. La corriente puede atribuirse a una densidad lineal de carga de valor λ_0 que se mueve a velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{x}$. Calcule el campo magnético integrando el campo producido por cada elemento de carga. Use las expresiones relativistas completas para los campos
$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$$
con
$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = q \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} \right]_{\text{ret}} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = q \frac{\mathbf{n}/\gamma^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2} R^2},$$
donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$ y ψ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$. Notar que en la segunda expresión aparecen todas cantidades evaluadas en el tiempo t, no en el tiempo retardado. Si utiliza la primera expresión para $\mathbf{E}$

deberá calcular cuál es la densidad lineal de carga $\lambda(x)$ "vista" desde $\mathbf{r}$. Sea que siga o no ese camino, calcule esa densidad. Lo que hay que notar al final de este problema es que aunque el campo de cada elemento de carga tiene correcciones relativistas, el campo de todo el hilo sigue estando dado por la ley de Bioy y Savart. Para una discusión de este tema ver Jackson 3ra. ed., nota al pie de la página 176, en la sección "Biot and Savart Law".

14. **Tiempos retardados y posición aparente (Opcional).** Encuentre la ecuación de la trayectoria aparente, vista por un observador en el origen, de una partícula que se mueve con velocidad constante según $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$. Dos métodos son sugeridos: 1) Directamente calculando el tiempo retardado. 2) Definiendo para cada instante t un sistema de referencia cuyo origen pase por el observador y que se mueva con la partícula, y usando la fórmula relativista de aberración. Tenga en cuenta, al seguir este segundo método, que para el observador que se mueve con la partícula el tiempo retardado es un concepto innecesario y que, en el instante considerado, los mismos rayos de luz alcanzan tanto al observador en reposo como al observador en movimiento. Usando lo anterior, siempre desde el *punto de vista* de un observador en el origen, encuentre:

    (a) La velocidad aparente como función del tiempo de una partícula que se mueve sobre el eje x y que pasa por el origen en $t = 0$. ¿Hay velocidades aparentes límite de acercamiento y alejamiento?

    (b) La longitud aparente como función del tiempo de una regla de longitud propia L que se mueve sobre el eje x y cuyo centro pasa por el origen en $t = 0$. ¿Qué relación hay entre la longitud aparente, la longitud propia y la longitud medida en el sistema al que pertenece el observador?

    (c) La forma aparente de une regla que se mueve en la dirección $\hat{x}$, orientada según el eje y y con su punto medio sobre el eje x. Grafique para varios tiempos, incluyendo aquel en que el centro de la regla pasa por el origen.

    (d) Para hacer en la computadora: grafique para varios tiempos o haga directamente la animación de la forma aparente de una esfera (esfera en su sistema propio) que se mueve a velocidad constante. Experimente variando la posición de mínimo acercamiento del centro de la esfera al origen. Vea con cuidado el caso $\gamma \gg 1$. Asegúrese de graficar en igual escala en las tres direcciones. ¿Puede inferir algún resultado general acerca del contorno aparente de la esfera vista desde el origen?

    Referencias: M. L. Boas, "Apparent Shape of Large Objects at Relativistic Speeds", Am. J. Phys. **29** (1961) 283; R. J. Deissler, "The appearance, apparent speed, and removal of optical effects for relativistically moving objects", Am. J. Phys. **73** (2005) 663; U. Kraus, "Brightness and color of rapidly moving objects: The visual appearance of a large sphere revisited", Am. J. Phys. **68** (2000) 56 [http://www.spacetimetravel.org/sphere/sphere.html].

Preguntas Molestas

1. ¿Cuál es la característica fundamental de los campos de radiación?

2. ¿Qué relación cumplen los campos de radiación eléctrico y magnético suficientemente lejos de sus fuentes?

3. Para un conjunto de n electrones libres en movimiento arbitrario, puede demostrarse (hacerlo) que el momento dipolar eléctrico total es proporcional a la posición del centro de masa del sistema. Por lo tanto, (demostrarlo) no hay radiación dipolar eléctrica. Además, también se demuestra (demostrarlo) que tampoco hay radiación dipolar magnética. Por lo tanto, ¿electrones acelerados no irradian?

4. Si calculamos los campos de radiación hasta el orden dipolar magnético, ¿qué términos debemos considerar?