FÍSICA TEÓRICA 1 - 2do. Cuatrimestre 2010

Ejercicios adicionales 18/8

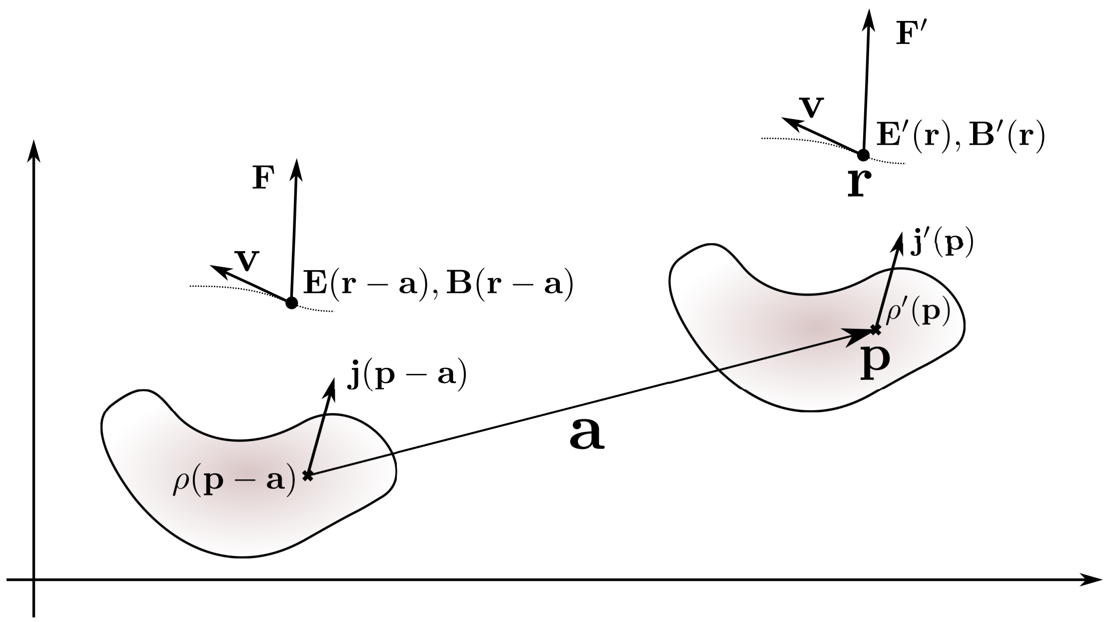
Durante la clase de práctica del miércoles 18 se propusieron algunos ejercicios adicionales. Abajo figuran estos ejercicios junto con un breve repaso del contexto en que fueron apareciendo.

Recordemos que a partir de la fuerza de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \tag{1}$$

habíamos visto que para respetar homogeneidad e isotropía del espacio los campos debían transformar de cierta manera. Si ante una traslación o una rotación de todas las fuentes, las trayectorias de las partículas de prueba debían simplemente trasladarse o rotarse, entonces lo mismo debía ocurrir con la fuerza, y eso dice algo para los campos.

Por ejemplo, en la siguiente figura aparecen el sistema original, definido por fuentes ρ y $\mathbf{j}$, y el sistema trasladado según un vector $\mathbf{a}$.



Este sistema trasladado tiene fuentes ρ' y $\mathbf{j}'$. La traslación de las fuentes queda definida por

$$\rho'(\mathbf{p}) = \rho(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \quad \text{y} \quad \mathbf{j}'(\mathbf{p}) = \mathbf{j}(\mathbf{p} - \mathbf{a}). \tag{2}$$

Eso define lo que uno entiende por traslación de un sistema de cargas y corrientes. Los campos del sistema original son ciertas funciones $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, y los del sistema trasladado, $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{B}'$. Si las trayectorias de las partículas de prueba para el sistema trasladado han de ser la traslación de las trayectorias para el sistema original, las fuerzas tienen que trasladarse con el sistema, es decir, $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$, lo que en términos de la fuerza de Lorentz es

$$q\left[\mathbf{E}'(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r})\right] = q\left[\mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{a})\right]. \tag{3}$$

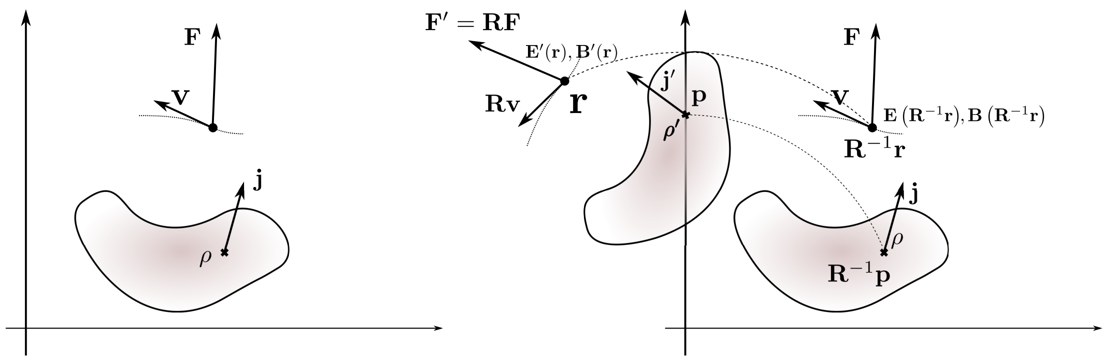
Como la velocidad de la partícula de prueba es arbitraria, la igualdad debe valer para la fuerza eléctrica y magnética por separado. Así,

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{a}). \tag{4}$$

Esto significa que si la electrodinámica respeta la homogeneidad del espacio, entonces cuando uno traslada un sistema de cargas y corrientes, los campos se trasladan con el sistema.

Cuando extendimos este argumento a las rotaciones, primero definimos lo que entendíamos por una rotación de las fuentes, es decir dimos la relación entre las fuentes originales y las rotadas

$$\rho'(\mathbf{p}) = \rho\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{j}'(\mathbf{p}) = \mathbf{R}\mathbf{j}\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}\right). \tag{5}$$



Aquí $\mathbf{R}$ es el operador que rota los vectores. Para que la fuerza rotara con el sistema, era inmediato ver que el nuevo campo eléctrico debía ser el rotado del original

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{E}\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}\right). \tag{6}$$

Pero al analizar la fuerza magnética, la condición para que la fuerza rotara con el sistema implicaba que

$$(\mathbf{R}\mathbf{v}) \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\left[\mathbf{v} \times \mathbf{B}\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}\right)\right]. \tag{7}$$

Para eliminar de esta relación la velocidad y llegar a una relación entre los campos dijimos que valía lo siguiente

Ejercicio 1: Demostrar que para una rotación $\mathbf{R}$ *y dos vectores* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$*, vale*

$$\mathbf{R}\left[\mathbf{A} \times \mathbf{B}\right] = (\mathbf{R}\mathbf{A}) \times (\mathbf{R}\mathbf{B}). \tag{8}$$

Para demostrarlo pueden trabajar en coordenadas cartesianas, donde $\mathbf{R}$ es una matriz de rotación, con componentes α_{ij}, y los vectores tienen componentes A_i y B_i. Usen el hecho de que las matrices de rotación son ortogonales, $\mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathrm{t}} = \mathbf{R}^{\mathrm{t}}\mathbf{R} = \mathbf{I}$. Recuerden la forma de escribir productos vectoriales

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \varepsilon_{ijk} A_i B_j. \tag{9}$$

Además les será útil saber que para una matriz $\mathbf{M}$ cualquiera de 3×3

$$\varepsilon_{ijk}\, M_{ia} M_{jb} M_{kc} = \varepsilon_{abc} \det \mathbf{M}. \tag{10}$$

A partir del resultado (8) y de la condición (7) pueden completarse los pasos que permitieron mostrar que el campo magnético también debía rotar con el sistema,

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{B}\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}\right). \tag{11}$$

Cuando pasamos a analizar reflexiones e inversión, encontramos sin dificultad que el campo eléctrico se reflejaba o se invertía, pero para llegar a un resultado en limpio para el campo magnético hubo que enunciar otro resultado, que es

Ejercicio 2: Demostrar que, en general, para una transformación ortogonal $\mathbf{R}$ *y dos vectores* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$*, vale*

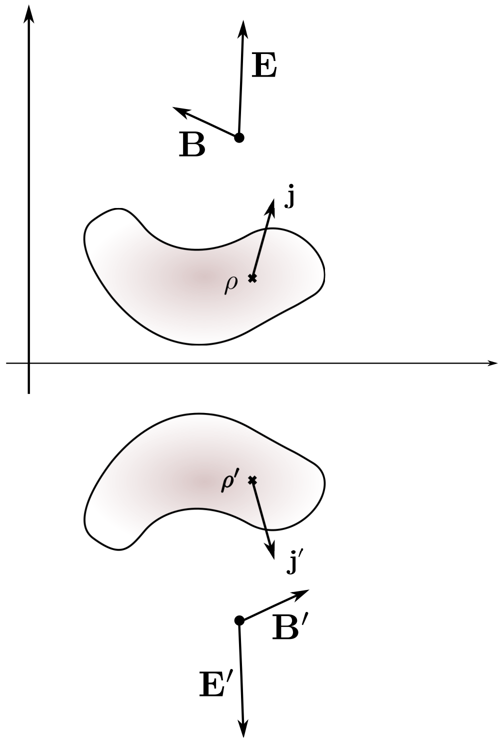
$$\mathbf{R}\left[\mathbf{A} \times \mathbf{B}\right] = (\det \mathbf{R})\ (\mathbf{RA}) \times (\mathbf{RB}). \tag{12}$$

Con el ejercicio 1 a la vista, prácticamente no queda nada por agregar a esta demostración. Las transformaciones ortogonales incluyen tanto a las rotaciones como a las reflexiones (por planos que pasen por el origen) y a la inversión (por el origen).

Con este resultado, quedaba

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = (\det \mathbf{R})\ \mathbf{RB}\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}\right). \tag{13}$$

Para inversión y reflexiones el determinante es igual a -1, para rotaciones es 1. La figura muestra lo que pasa con los campos frente a una reflexión de las fuentes.



Estos resultados surgen únicamente de pedir que la fuerza de Lorentz respete isotropía, homogeneidad y las simetrías frente a inversión y reflexiones. Lo que hemos dicho es *cómo deberían* transformar los campos si las leyes de la electrodinámica respetaran esas simetrías de las leyes físicas. No simetrías de sistemas físicos en particular, sino simetrías al nivel de las leyes físicas en sí. Que los campos transformen o no de esa manera es algo que aún no hemos mostrado. Como las ecuaciones de Maxwell determinan de manera independiente los campos a partir de las fuentes, queda por ver que efectivamente los campos definidos por esas ecuaciones cumplen con las propiedades de transformación anteriores. En clase esbozamos la demostración únicamente para campos estáticos (aunque puede hacerse de manera general). Quizá el camino más directo sea el siguiente:

Ejercicio 3: Demostrar a partir de las expresiones integrales para los campos estáticos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int d^3r'\ \rho(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \\
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c}\int d^3r'\ \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3},
\end{aligned} \tag{14}$$

que los campos de las fuentes transformadas por traslaciones y transformaciones ortogonales se obtienen transformando los campos originales según lo que se vio más arriba a partir de los argumentos de homogeneidad, isotropía, etc.

Un camino menos directo pero que se puede generalizar más fácilmente al caso de campos dinámicos es:

Ejercicio 4: Demostrar lo mismo de antes pero a partir de las ecuaciones de Maxwell para los campos estáticos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{16}$$

Esto sirve para practicar cálculo vectorial y notación de índices. Por último, otro ejercicio para practicar notación de índices y un poco de geometría.

Ejercicio 5: Demostrar que en coordenadas cartesianas, la matriz de una reflexión por un plano que pasa por el origen y tiene normal $\mathbf{n}$ *está dada por*

$$R_{ij} = \delta_{ij} - 2n_i n_j. \tag{17}$$

Verificar que es una matriz ortogonal. ¿Cómo se escribe la transformación cuando el plano no pasa por el origen?

Recomendamos que para la clase del lunes 23 tengan hechos los ejercicios 0 y 1 de la Guía 1. También pueden ir viendo cómo aplicar los argumentos de simetría en los casos presentados en el ejercicio 2.