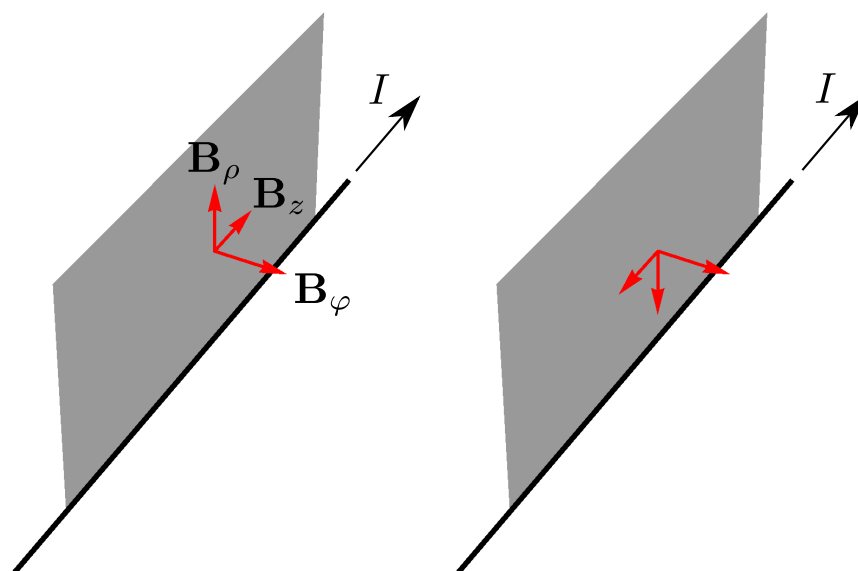


FÍSICA TEÓRICA 1 - 2do. Cuatrimestre 2010

Clase de práctica del 23/8

Lo que sigue toma en parte lo hecho en la clase del lunes 23/8 y algunos otros problemas de la guía que se dejaron sin resolver. Verán que muchas veces se dice *pueden demostrar, es fácil ver, verán que*, y así por el estilo. La idea es que completen los pasos que aquí se dejan sin hacer, por más triviales que parezcan. Estas notas pueden leerse como un complemento a la clase de práctica. Sean indulgentes con las erratas. La parte de la clase, muy breve, de integración directa, se publicará después.

Durante la clase de práctica del lunes 23/8 vimos cómo aplicar transformaciones de simetría en problemas de magnetostática. Sin calcular explícitamente el campo magnético, con este tipo de argumentos uno puede decir algo acerca de la combinación de variables de las que depende \mathbf{B} y de las componentes que necesariamente deben anularse. Por ejemplo, en el caso de un hilo con corriente (Ej. 2a), uno elegía un punto cualquiera y hacía una reflexión por un plano que contuviera al hilo y al punto en cuestión. Supuestas originalmente no nulas las tres componentes de \mathbf{B} , la transformación deja invariantes las fuentes, pero cambia el signo de B_z y B_ρ . Así, la única que puede ser no nula es B_φ .



Recuerden que la transformación de \mathbf{B} en una reflexión de las fuentes se hace en dos pasos: se refleja el vector, como si fuera un vector ordinario y luego se lo multiplica por -1 . Así, las componentes que están sobre el plano de reflexión cambian de signo, y la componente perpendicular, que en principio se refleja, gracias al cambio extra de signo queda finalmente donde estaba. La figura de arriba muestra eso: se ha elegido un punto cualquiera fuera del hilo y se han supuesto las tres componentes posibles para \mathbf{B} . Haciendo la reflexión por el plano que contiene al hilo y al punto, el campo transforma como se muestra a la derecha de la figura, aunque las fuentes no han cambiado. Las componentes de \mathbf{B} que cambiaron de signo deben ser nulas, para que pueda afirmarse que son iguales antes y después de la transformación.

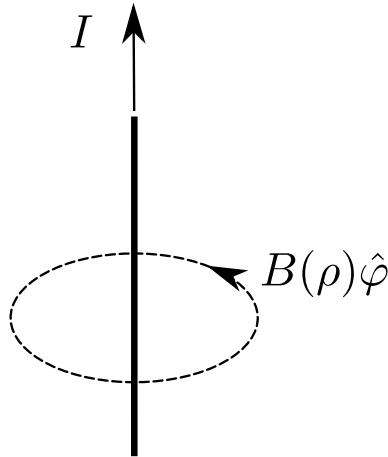
Lo que acabamos de decir junto con la simetría de traslación y de rotación permite concluir la siguiente forma para el campo

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(\rho) \hat{\varphi}. \quad (1)$$

Si uno quisiera mostrar explícitamente todas las dependencias en las coordenadas cilíndricas habría que escribir

$$\mathbf{B}(\rho, \varphi, z) = B(\rho) \hat{\varphi}(\varphi), \quad (2)$$

porque hay que tener en cuenta que el propio versor $\hat{\varphi}$ es una función de las coordenadas. Usando la ley de Ampère se puede encontrar cuál es la función $B(\rho)$,



$$2\pi\rho B(\rho) = \frac{4\pi}{c}I \Rightarrow B(\rho) = \frac{2I}{c\rho}. \quad (3)$$

Pasemos ahora al cálculo del potencial vector. Como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, siempre es posible escribir \mathbf{B} a partir de un potencial vector \mathbf{A} , en la forma

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4)$$

En realidad \mathbf{A} no es único, puesto que cualquier otro $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ tiene el mismo rotor y da lugar al mismo campo \mathbf{B} . En clase dijimos que era posible, aunque no necesario, encontrar un potencial vector \mathbf{A} que respetara las simetrías de las fuentes. El significado de este enunciado depende de las propiedades de transformación de \mathbf{A} . Sin demostrarlo, dijimos que \mathbf{A} transformaba igual que un campo eléctrico. Para campos estáticos es fácil verlo, ya que \mathbf{A} es simplemente

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5)$$

Volviendo al problema del hilo, la misma reflexión que hicimos antes para descartar componentes de \mathbf{B} implica que son nulas las componentes de \mathbf{A} que no eran necesariamente nulas para \mathbf{B} ; es decir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_z(\rho) \hat{z} + A_\rho(\rho) \hat{\rho}. \quad (6)$$

Viendo cómo escribir el rotor en coordenadas cilíndricas pueden completar los pasos que llevan a la siguiente ecuación

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -A'_z(\rho) \hat{\varphi}. \quad (7)$$

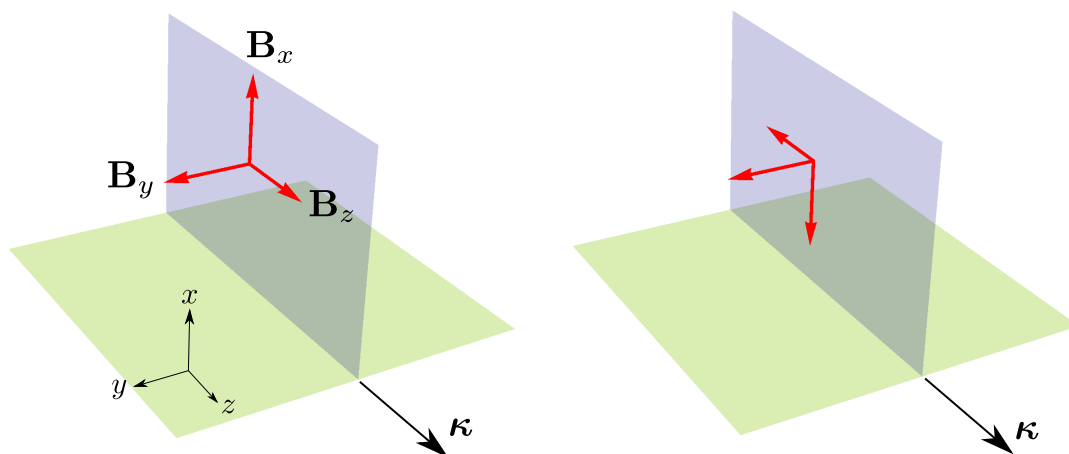
Esto debe ser igual al campo magnético,

$$\begin{aligned} -A'_z(\rho) \hat{\varphi} = \frac{2I}{c\rho} \hat{\varphi} &\Rightarrow A_z(\rho) = -\frac{2I}{c} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'} \\ &= -\frac{2I}{c} \log\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

El valor de ρ_0 es irrelevante. Hay que notar que no existe ninguna ecuación para la otra componente del potencial vector, $\mathbf{A}_\rho(\rho)$. Pero es natural que así sea: debido a su forma funcional, su rotor es cero: no da ninguna contribución para el campo \mathbf{B} . Con todo derecho podemos elegir $\mathbf{A}_\rho = 0$, y escribir finalmente

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{2I}{c} \log\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \hat{z}. \quad (9)$$

En clase vimos también que el problema del plano con densidad superficial uniforme de corriente κ podía simplificarse usando argumentos de simetría (Ej. 2b). Una reflexión muy parecida a la usada para el caso del hilo permite decir que el campo magnético no puede tener componentes ni paralelas a κ ni a la normal al plano,



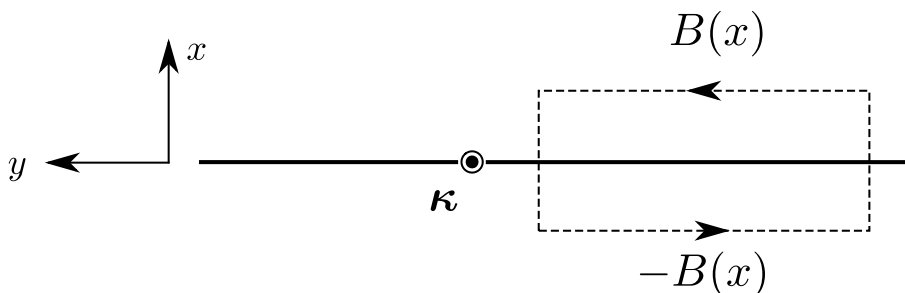
Es decir, si, como en la figura, el plano de corriente coincide con el plano yz , y la corriente fluye en la dirección z , entonces el campo magnético tiene que tener esta forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(x) \hat{y}. \quad (10)$$

[Disculpas por el cambio inadvertido de ejes que hubo durante la clase.] El campo sólo puede depender de la coordenada x , ya que hay simetría de traslación en y y en z . Usando la simetría de reflexión por el propio plano yz se puede relacionar el campo en x con el campo en $-x$,

$$B(-x) = -B(x), \quad (11)$$

es decir, $B(x)$ es una función impar. Vean si pueden repetir ustedes el argumento que dimos en clase. Luego, aplicando Ampère a un lazo rectangular perpendicular a la corriente y dispuesto simétricamente respecto del plano,



se obtiene

$$B(x) = \frac{2\pi}{c} \kappa \operatorname{signo} x. \quad (12)$$

Si piensan al plano como una colección de hilos de corriente, aplicando la regla de la mano derecha es claro que el campo magnético tiene que circular de ese modo.

Para este problema, usando la misma reflexión de antes vemos que el potencial vector puede elegirse del siguiente modo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(x) \hat{x} + A_z(x) \hat{z}. \quad (13)$$

Sus componentes no necesariamente nulas son las que antes debían serlo en el caso de \mathbf{B} . La ecuación que determina las funciones A_x y A_z es $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Noten de nuevo que $A_x(x) \hat{x}$ tiene rotor nulo, de manera que al final lo que queda es

$$A'_z(x) = \frac{2\pi\kappa}{c} \operatorname{signo} x. \quad (14)$$

Esta ecuación puede integrarse tomando como referencia el punto $x = 0$. Para integrarla lo único que hay que notar es que

$$\int_0^x dx' \operatorname{signo} x' = \begin{cases} \int_0^x dx' (+1) = x, & \text{si } x \geq 0 \\ \int_0^x dx' (-1) = -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = |x|. \quad (15)$$

De manera que al final lo que queda es

$$A_z(x) = \frac{2\pi\kappa}{c} |x|. \quad (16)$$

El problema que sigue es el de los dos planos paralelos con corrientes uniformes en cada uno (Ej. 2c). La solución se construye con lo que se encontró antes para un plano, usando superposición.

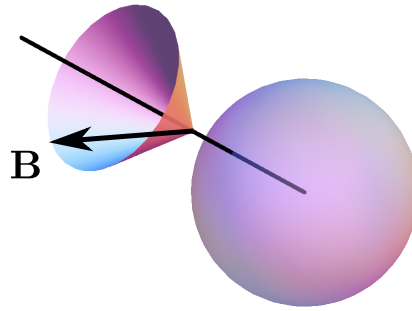
El caso siguiente (Ej. 2d) es el de una corriente radial y uniforme entre dos esferas de radios a y $b > a$. Que sea radial quiere decir que $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j(r) \hat{r}$. Que sea uniforme significa dos cosas: primero, que la función $j(\mathbf{r})$ no depende de la dirección, sino que es sólo una función de r

$$j(\mathbf{r}) = j(r); \quad (17)$$

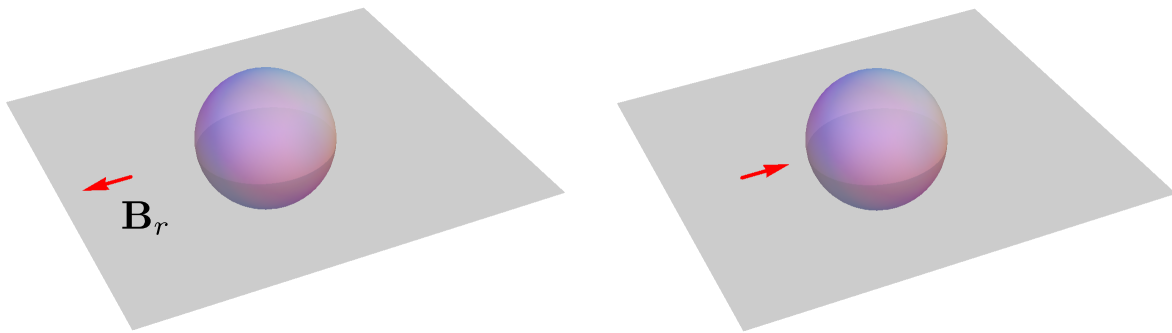
y segundo, que la corriente que pasa a través de cualquier esfera de radio $a < r < b$ es la misma, digamos I :

$$4\pi r^2 j(r) = I. \quad (18)$$

Ustedes deben ver que este problema no puede ser en verdad estático: si hay corriente fluyendo radialmente, en algún punto la densidad de carga debe estar disminuyendo (supuesta $I > 0$). No pueden alejar indefinidamente en el espacio el origen de esa corriente, puesto que a lo sumo debe partir desde el origen. De todas maneras, ya hemos dicho que las propiedades de transformación de \mathbf{B} que vimos en el caso estático valen también en general. Por simetría de rotación alrededor de cualquier eje que pase por el origen, el campo \mathbf{B} debe ser radial, pues en caso contrario no será invariante ante las rotaciones, sino que describirá un cono,



Además, debido a la simetría de reflexión por cualquier plano que pase por el origen, la componente radial de \mathbf{B} también debe ser cero.



(La reflexión por el plano que contiene al punto \mathbf{r} y al origen, cambia el signo de un \mathbf{B} radial. Pero como la distribución de corriente no cambia en esa reflexión, el campo antes y después debe ser el mismo. La única posibilidad es que sea cero.)

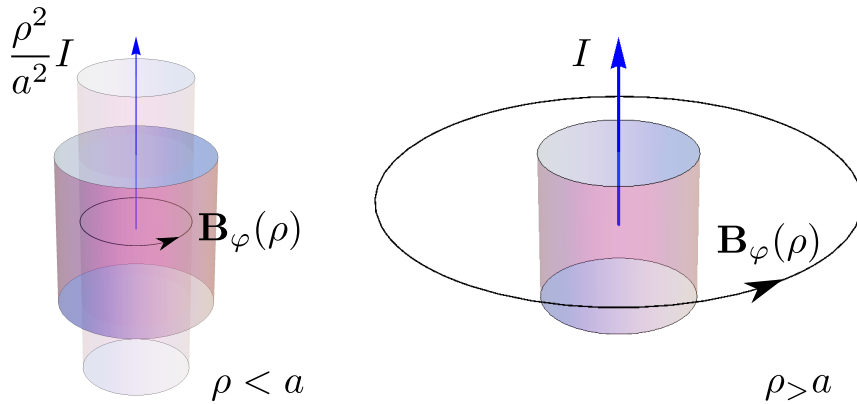
En conclusión, $\mathbf{B} = 0$. Pueden mostrar que este resultado no depende en realidad de que la corriente vaya como $1/r^2$, sino tan sólo de que sea de la forma $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j(r) \hat{r}$. Podría notarse otra cosa, y es que tratándose de un problema dinámico la fuente de \mathbf{B} no es únicamente la densidad de corriente \mathbf{j} , sino también, de manera indirecta, la densidad de carga. Desde un principio esta densidad de carga debe tener simetría esférica para poder concluir que $\mathbf{B} = 0$. El problema completo es el que debe tener simetría esférica.

Los ítems (e) y (f) son muy similares al (a), en lo que toca a las simetrías y a decir cuál es la forma funcional de \mathbf{B} , que debe ser

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_\varphi(\rho) = B(\rho) \hat{\varphi}. \tag{19}$$

Calcular $B(\rho)$ mediante Ampère cambia un poco, porque tienen que analizar por separado la zona interior y la exterior a los cilindros. En el primer caso es un cilindro de radio a con densidad uniforme de corriente paralela a su eje [algo que falta aclarar en la guía]. Supongamos que la corriente total sea I . Si toman una

circunferencia centrada en el eje del cilindro y de radio $\rho < a$, la corriente que la atraviesa es $I\rho^2/a^2$. Si la circunferencia tiene radio $r > a$, la corriente es la corriente total I .



Así, si hacen Ampère sobre una circunferencia centrada en el eje del cilindro, obtienen, dentro del cilindro

$$2\pi\rho B_{\text{int}}(\rho) = \frac{4\pi}{c} \times \frac{\rho^2}{a^2} I \Rightarrow B_{\text{int}}(\rho) = \frac{2I}{c} \frac{\rho}{a^2}, \quad (20)$$

y fuera

$$2\pi\rho B_{\text{ext}}(\rho) = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow B_{\text{ext}}(\rho) = \frac{2I}{c\rho}. \quad (21)$$

Fuera del cable, el campo es del de un hilo.

En el caso de la cáscara cilíndrica con corriente neta I paralela al eje (Ej. 2f), es

$$2\pi\rho B_{\text{int}}(\rho) = 0 \Rightarrow B_{\text{int}} = 0, \quad (22)$$

y, igual que antes, afuera tienen el campo de un hilo

$$2\pi\rho B_{\text{ext}}(\rho) = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow B_{\text{ext}} = \frac{2I}{c\rho}. \quad (23)$$

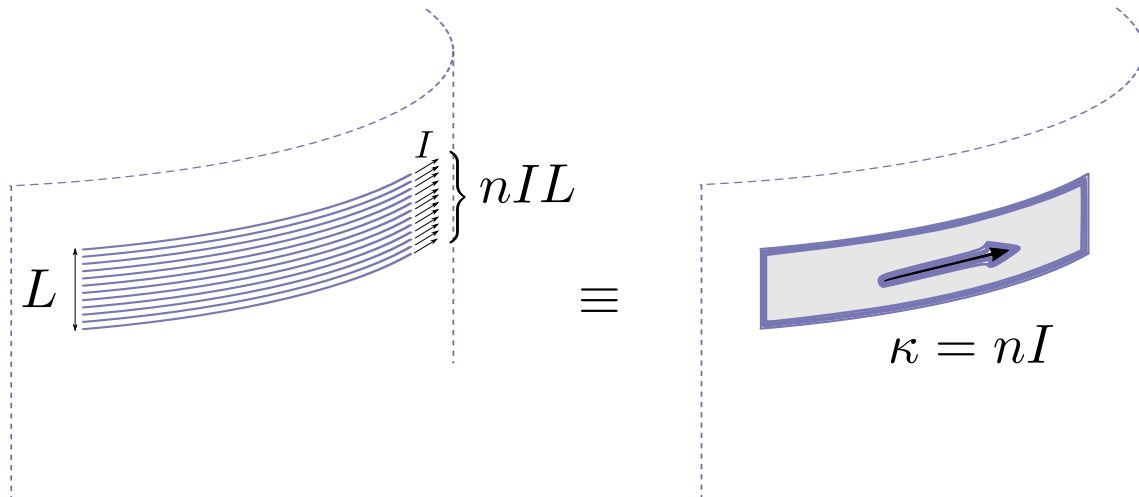
En los dos casos, cilindro uniforme o cáscara, el cálculo del potencial vector es muy parecido al caso del hilo, lo único que cambia es la función $B(\rho)$; tendrán que resolver

$$A'_z(\rho) = -B(\rho) \Rightarrow A_z(\rho) = - \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' B(\rho'). \quad (24)$$

Esta vez pueden elegir $\rho_0 = 0$.

El ítem (g) es sobre un solenoide infinito. En clase supusimos que era de base circular, pero aclaramos que, en lo que respecta a \mathbf{B} , eso era irrelevante. La corriente superficial sobre el solenoide se da en términos de dos cantidades: el número n de vueltas por unidad de longitud y la corriente I . Esto corresponde a asumir

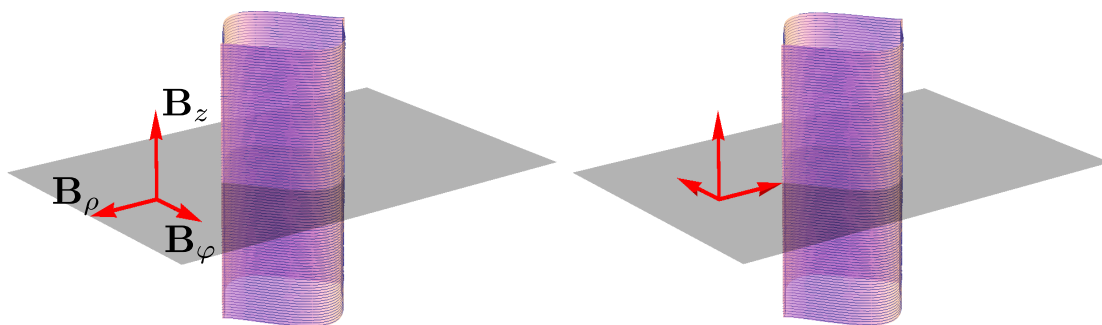
que esta corriente circula por un cable muy delgado y muy compactamente arrollado alrededor del solenoide, de manera que cada espira puede considerarse plana, y todas, paralelas entre sí. Si son n espiras por unidad de longitud, quiere decir que sobre el solenoide, a través de cada segmento de longitud L paralelo al eje, pasa una corriente igual nIL . Esto es equivalente a tener una densidad superficial de corriente κ , cuyo módulo es nI y cuya dirección en cada punto es la del vector tangente en la dirección perpendicular al eje del solenoide.



Para el solenoide circular que tiene por eje al eje z es

$$\kappa = nI \hat{\phi} \tag{25}$$

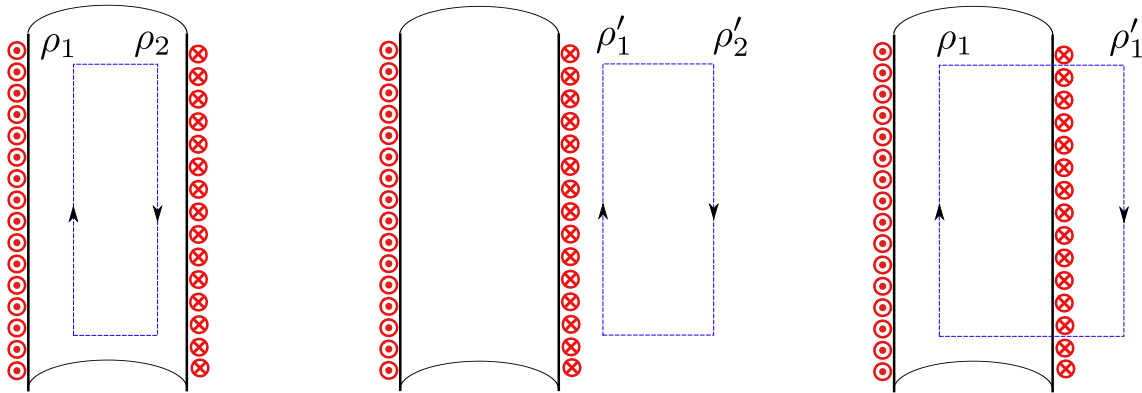
Sea que el solenoide tenga o no sección circular, mediante una reflexión por un plano paralelo al plano xy es posible decir que la única componente de \mathbf{B} que no es necesariamente nula es la componente según z . Tienen que convencerse de que esas reflexiones son simetrías de la distribución de corriente.



Notarán que para que todas estas reflexiones sean transformaciones de simetría, es fundamental que el solenoide tenga longitud infinita. A su vez, la simetría de traslación permite decir que \mathbf{B} no puede depender de la variable z . En definitiva,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(\rho, \varphi) \hat{z}. \tag{26}$$

En el caso del solenoide circular la simetría de rotación diría que tampoco puede depender del ángulo φ . Independientemente de si el solenoide es circular o no, vimos que podía probarse que el campo magnético debía tener un valor constante B_{int} dentro del solenoide y otro valor constante B_{ext} en su exterior, tal que la diferencia entre estos dos valores fuera una cantidad dada. Este resultado salía de aplicar Ampère.



$$\begin{aligned}
 B_{\text{int}}(\rho_1) - B_{\text{int}}(\rho_2) &= 0, \\
 B_{\text{ext}}(\rho'_1) - B_{\text{ext}}(\rho'_2) &= 0, \\
 B_{\text{int}}(\rho_1) - B_{\text{ext}}(\rho'_1) &= \frac{4\pi nI}{c}.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Por otros medios puede demostrarse que sea cual sea la sección del solenoide, $B_{\text{ext}} = 0$, así que la última ecuación da

$$B_{\text{int}} = \frac{4\pi nI}{c}. \tag{28}$$

Varias demostraciones de que $B_{\text{ext}} = 0$ pueden encontrarse en los papers que figuran en la página de la materia. Es una queja habitual que en los libros no se den justificaciones rigurosas de ese hecho.

En clase no hubo tiempo de calcular el potencial vector. Para calcularlo ahora vamos a suponer que el solenoide tiene sección circular. Obtendremos \mathbf{A} por dos caminos, el que ya empleamos antes y otro que consiste en transformar el problema para \mathbf{A} en un problema magnético para cierto campo \mathbf{B}_A . Este segundo método tiene cierta elegancia formal.

Siguiendo el método que aplicamos en los problemas anteriores, las componentes no necesariamente nulas de \mathbf{A} son las que antes eran nulas para \mathbf{B} . Junto con la simetría de rotación (¡el solenoide tiene que ser circular!) y la de traslación es entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\rho) \hat{\varphi}. \tag{29}$$

Para una función de esta forma

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho A(\rho)] \hat{z}. \tag{30}$$

Así, la ecuación que queda es

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho A(\rho)] = B(\rho) = \begin{cases} \frac{4\pi n I}{c}, & \text{si } \rho < a \\ 0, & \text{si } \rho > a \end{cases} \quad (31)$$

A los efectos de integrar esta ecuación, no interesa cuál es el valor de B justo en $\rho = a$. Vamos a integrar esto a partir de $\rho = 0$, suponiendo que $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho A(\rho) = 0$. Luego verificaremos esta suposición. Así que por el momento sería

$$\begin{aligned} \rho A(\rho) - \lim_{\rho' \rightarrow 0} \rho' A(\rho') &= \int_0^\rho d\rho' \rho' B(\rho') \Rightarrow \\ A(\rho) &= \frac{1}{\rho} \int_0^\rho d\rho' \rho' B(\rho'). \end{aligned} \quad (32)$$

Para el solenoide pueden demostrar que el resultado es

$$A(\rho) = \frac{4\pi n I}{c} \begin{cases} \frac{\rho}{2}, & \text{si } \rho < a \\ \frac{a^2}{2\rho}, & \text{si } \rho \geq a \end{cases} \quad (33)$$

Y en efecto, este resultado es compatible con el comportamiento que supusimos para $\rho A(\rho)$ cuando $\rho \rightarrow 0$. Noten además lo siguiente: \mathbf{A} no es cero, y ni siquiera constante, fuera del cilindro, aunque \mathbf{B} lo es. Pero también noten que el rotor de una función que sea de la forma $C\hat{\phi}/\rho$, tal como es $A(\rho)$ en el exterior del solenoide, es cero,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho C/\rho] = 0 \quad (\text{salvo en } \rho = 0), \quad (34)$$

así que no hay ninguna contradicción.

El otro método para calcular \mathbf{A} permite usar uno de los resultados anteriores, sin necesidad de ningún cálculo extra. Saben que la libertad en la elección de \mathbf{A} permite imponerle ciertas condiciones. Se dice que uno fija la medida o el *gauge*. En el gauge de Coulomb uno pide que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. En problemas estáticos las ecuaciones para \mathbf{A} , en el gauge de Coulomb, son

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (35)$$

La segunda ecuación puede reescribirse así

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \left[\frac{c\mathbf{B}}{4\pi} \right]. \quad (36)$$

¿Cuál es el sentido de hacer esto? Escribir el problema para \mathbf{A} de la misma forma en que si se tratase del problema de encontrar un campo magnético, donde lo que hace las veces de la densidad de corriente \mathbf{j} es la combinación $c\mathbf{B}/4\pi$. Es decir, el campo magnético hace las veces de densidad de corriente para un problema magnetostático, donde \mathbf{A} hace las veces de campo magnético. (Leer lo anterior hasta que no tenga ningún sentido o adquiera uno.)

En el problema del solenoide, el campo es cero afuera, y constante y en la dirección z dentro del solenoide. Desde el punto de vista del problema magnético planteado para \mathbf{A} , es como si se tratara de un cable con

corriente uniforme, y eso ya quedó resuelto más arriba. El resultado dependía de la corriente total transportada por el cable. El campo magnético del cable con corriente I era $\mathbf{B}(\rho) = B(\rho) \hat{\varphi}$, y la función B se escribía considerando por separado el interior y el exterior del cable, ecs. (20) y (21):

$$B_{\text{int}}(\rho) = \frac{2I}{c} \frac{\rho}{a^2}, \quad (37)$$

$$B_{\text{ext}}(\rho) = \frac{2I}{c\rho}. \quad (38)$$

En el problema para \mathbf{A} , lo que hace las veces de I es la combinación

$$I_A = \left(\frac{cB}{4\pi} \right) \pi a^2, \quad (39)$$

donde $B = 4\pi nI/c$, el campo dentro del solenoide. Lo que está escrito ahí es la densidad de corriente efectiva multiplicada por el área del "cable", es decir, la corriente total. Entonces, directamente reemplazando en el par de ecuaciones anteriores I por I_A se obtiene

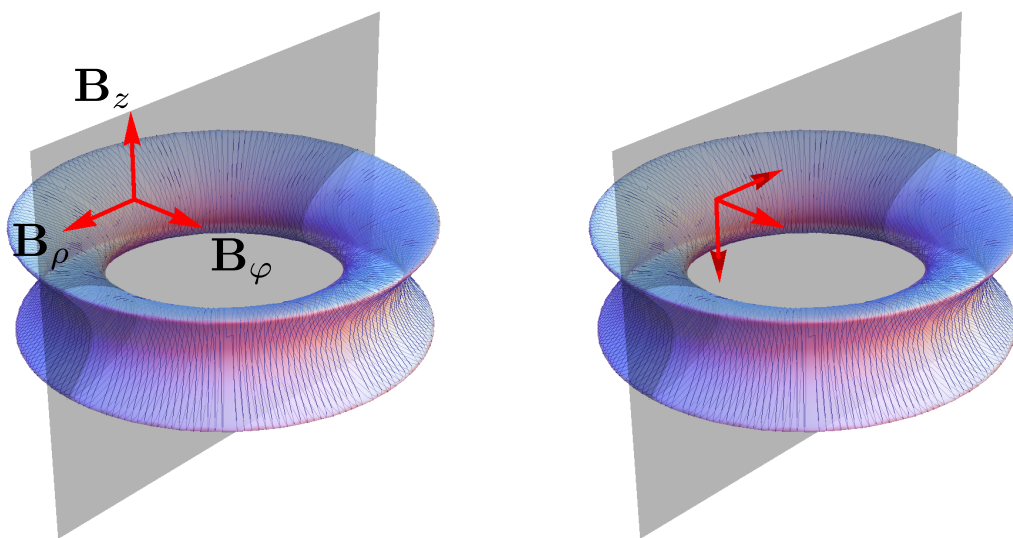
$$A_{\text{int}}(\rho) = \frac{2\pi nI\rho}{c}, \quad (40)$$

$$A_{\text{ext}}(\rho) = \frac{2\pi nIa^2}{c\rho}. \quad (41)$$

Esto coincide con el resultado (33).

Estén atentos entonces cuando se les pide calcular el potencial \mathbf{A} de un campo \mathbf{B} que tenga la misma forma que una densidad de corriente para la cual sepan cómo calcular el campo magnético de una manera más o menos fácil. Pueden leer más sobre este modo de calcular el potencial vector en el paper de N. J. Carron, "On the field of a torus and the role of the vector potential", *Am. J. Phys.* **63**, 717 (1995) [para bajar en la página de su materia amiga]. Feynman también aplica en esencia el mismo método cuando calcula \mathbf{A} para el solenoide, en la sección 14.4 de su libro.

El último ítem del ejercicio 2 es acerca del campo de un toro. Haciendo una reflexión adecuada verán que el campo sólo puede tener componente en la dirección de $\hat{\varphi}$, sea cual sea la sección del toro, circular o no.



También pueden calcular por Ampère el campo en todo el espacio, sin depender de ningún otro resultado. Para el solenoide tuvimos que decir, sin dar la demostración, que \mathbf{B}_{ext} era cero. En el caso del toroide ese resultado se obtiene por Ampère en forma directa. El campo dentro del toroide no será uniforme, sino que dependerá de una manera muy simple de la distancia al eje z ,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{2NI}{c\rho} \hat{\phi}. \quad (42)$$

Aquí N es el número total de espiras e I es la corriente a través de cada una. Todo esto tampoco depende de la sección del toroide.

Calcular el potencial vector puede no ser sencillo, a menos que uno asuma que la sección del toroide tiene un diámetro muy pequeño comparado con su radio medio. Pueden ver que si ese es el caso, el problema magnético equivalente para \mathbf{A} es el de una espira con corriente. (Y, aun en ese caso tan simple, tienen que escribir el campo en términos de las llamadas integrales elípticas, que, después de todo, son funciones tan buenas como un seno o un coseno, pero con las que uno no suele estar familiarizado).

Un comentario final. Vimos antes, ec. (30), que al calcular el rotor de una función de la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\rho) \hat{\phi}, \quad (43)$$

uno obtiene

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho f(\rho)] \hat{z}. \quad (44)$$

¿Qué pasa si $f(\rho) = C/\rho$, donde C es una constante? La aplicación directa de la fórmula anterior da

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{C}{\rho} \right] = 0. \quad (45)$$

De manera que uno diría que

$$\nabla \times \frac{\hat{\phi}}{\rho} = 0. \quad (!) \quad (46)$$

Pero esto no puede ser cierto. Basta recordar que el campo magnético de un hilo con corriente I sobre el eje z tiene la forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{C}{\rho} \hat{\phi}, \quad (47)$$

donde $C = 2I/c$, pero su rotor no es cero, porque hay una densidad de corriente $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ concentrada en el eje z :

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi \mathbf{j}(\mathbf{r})}{c} = \frac{4\pi}{c} I \delta(x) \delta(y) \hat{z}. \quad (48)$$

La función delta en cilíndricas que corresponde al producto $\delta(x)\delta(y)$ es $\delta(\rho)/(2\pi\rho)$, de manera que, juntando todo,

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{2I}{\rho c} \hat{\phi} &= \frac{2I}{\rho c} \delta(\rho) \hat{z} \Rightarrow \\ \nabla \times \frac{\hat{\phi}}{\rho} &= \frac{1}{\rho} \delta(\rho) \hat{z}. \end{aligned} \quad (49)$$

Lo que sucede es que la ec. (44) no es necesariamente válida si la función f tiene singularidades en $\rho = 0$. Intenten demostrar, aplicando la regla de la cadena, a partir del rotor en coordenadas cartesianas, que para una función de la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\rho) \hat{\varphi} = f(\rho) (-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}), \quad (50)$$

la componente z del rotor de \mathbf{F} , $\partial_x F_y - \partial_y F_x$, es

$$[\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})]_z = f'(\rho) + \frac{1}{\rho} f(\rho). \quad (51)$$

Verán que la trampa que se oculta en la ec. (44) tiene que ver con el hecho de reescribir lo anterior sin tener el cuidado de preguntarse si f' y f/ρ están bien definidas en $\rho = 0$,

$$f'(\rho) + \frac{1}{\rho} f(\rho) = \frac{1}{\rho} (\rho f)'. \quad (52)$$

Esto es análogo a lo que, habrán visto, ocurre para el laplaciano en esféricas de una función de la forma $f(\mathbf{r}) = C/r$. Si aplican ciegamente la fórmula

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \dots, \quad (53)$$

lo que obtienen es

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r^2 \frac{C}{r^2} \right) = 0. \quad (!) \quad (54)$$

Sin embargo, ustedes saben que C/r es el potencial de una carga, y que su laplaciano no es cero, sino una delta en el origen

$$\nabla^2 \frac{C}{r} = -4\pi C \delta^3(\mathbf{r}). \quad (55)$$

En términos del campo eléctrico, el error sería usar descuidadamente la fórmula

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \dots, \quad (56)$$

en el caso en que $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{r}/r^2$, es decir, el campo eléctrico de una carga puntual. La aplicación directa de la fórmula anterior da que la divergencia es cero, en lugar de $4\pi\delta^3(\mathbf{r})$.

Todo esto tiene alguna aplicación en el problema 5. El dato es el potencial de un átomo de hidrógeno (protón + electrón),

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} (1 + r/a) e^{-2r/a}, \quad (57)$$

donde a es el radio de Bohr y q es la carga del protón [en lugar de la carga del electrón como dice el enunciado de la guía; hay un error ahí]. Se pide encontrar la densidad de carga como función de r . Podemos hacerlo a través del laplaciano de Φ ,

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho. \quad (58)$$

El problema es que $\Phi(\mathbf{r})$ tiene una singularidad en el origen, lo que está bien, porque en el origen está el protón, que es una carga puntual:

$$\Phi(\mathbf{r}) \sim \frac{q}{r}, \quad (r \rightarrow 0). \quad (59)$$

Veamos dos caminos para calcular $\nabla^2\Phi$. Podemos escribir Φ como el producto de dos funciones, una singular en el origen y otra regular:

$$\Phi(\mathbf{r}) = qf_S(\mathbf{r})f_R(\mathbf{r}), \quad (60)$$

donde la parte singular en ese producto es

$$f_S(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}, \quad (61)$$

y la parte regular,

$$f_R(\mathbf{r}) = (1 + r/a)e^{-2r/a}. \quad (62)$$

Entonces

$$\nabla^2\Phi = q \left[f_R \nabla^2 f_S + 2\nabla f_S \cdot \nabla f_R + f_S \nabla^2 f_R \right]. \quad (63)$$

El laplaciano de f_R puede calcularse usando la ecuación (53), ya que es regular en el origen. Por otro lado, acerca de la función $f_S = 1/r$ sabemos que: su laplaciano es $-4\pi\delta^3(\mathbf{r})$ y su gradiente es $-\hat{r}/r^2$. Reuniendo todo queda

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = q \left[-4\pi\delta^3(\mathbf{r})f_R(\mathbf{r}) - 2 \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \frac{\partial f_R(\mathbf{r})}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f_R(\mathbf{r})}{\partial r} \right) \right]. \quad (64)$$

El producto $\delta^3(\mathbf{r})f_R(\mathbf{r})$ puede reemplazarse por $\delta^3(\mathbf{r})$, ya que $f_R(0) = 1$. Ahora son unas cuantas derivadas; el resultado puede escribirse así

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = q \left[\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} \right]. \quad (65)$$

La delta en el origen debe identificarse con la densidad de carga del protón. El resto es la densidad de carga de la nube electrónica,

$$\rho_e(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a}. \quad (66)$$

Podemos integrarla en todo el espacio y ver que da $-q$:

$$\begin{aligned} - \int d^3r \frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a} &= -4\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a} \\ &= -4q \int_0^\infty dx x^2 e^{-2x} = -q. \end{aligned} \quad (67)$$

Los que hayan visto algo de cuántica tal vez recuerden que la función de onda del estado fundamental del átomo de hidrógeno es

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}. \quad (68)$$

La densidad de probabilidad de encontrar al electrón en un punto \mathbf{r} es el módulo al cuadrado de esta función,

$$|\psi_0|^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a}, \quad (69)$$

y esto coincide, a menos del factor $-q$, con el resultado para la densidad de carga ρ_e , ec. (66).

El otro camino para calcular ρ consiste en escribir Φ como una suma, en lugar de un producto:

$$\Phi = q(g_S + g_R) \quad (70)$$

donde g_R sea regular en el origen. Así,

$$\nabla^2 \Phi = q [\nabla^2 g_S + \nabla^2 g_R], \quad (71)$$

con el cuidado puesto en el cálculo del laplaciano de la parte singular. Cerca del origen Φ va como q/r , más precisamente

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \mathcal{O}(r^2) \right], \quad (72)$$

por lo tanto la diferencia $\Phi - q/r$ será una función regular en el origen, y podemos entonces escribir

$$\Phi = q \left[\frac{1}{r} \right] + \left[\Phi - \frac{q}{r} \right], \quad (73)$$

y es claro entonces que $g_S = 1/r$ y

$$g_R = \frac{1}{q} \left[\Phi - \frac{q}{r} \right] = \frac{1}{r} \left[\left(1 + \frac{r}{a} \right) e^{-2r/a} - 1 \right]. \quad (74)$$

El laplaciano de g_S es de nuevo la delta, y el laplaciano de g_R se calcula con la ec. (53). Varias derivadas más tarde se obtiene el resultado de antes, ec. (65).