

FÍSICA TEÓRICA 1 - 2do. Cuatrimestre 2010

Clase de práctica del 25/8

Agrupamos aquí los problemas de integración directa, incluyendo el ejercicio 3, que en realidad se hizo la clase anterior.

Antes de resolver los ejercicios, en clase hicimos el siguiente comentario. Supongamos tener un problema electrostático donde conocemos la situación de todas las cargas, es decir, conocemos ρ en todo el espacio. El potencial puede encontrarse mediante la integral

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1)$$

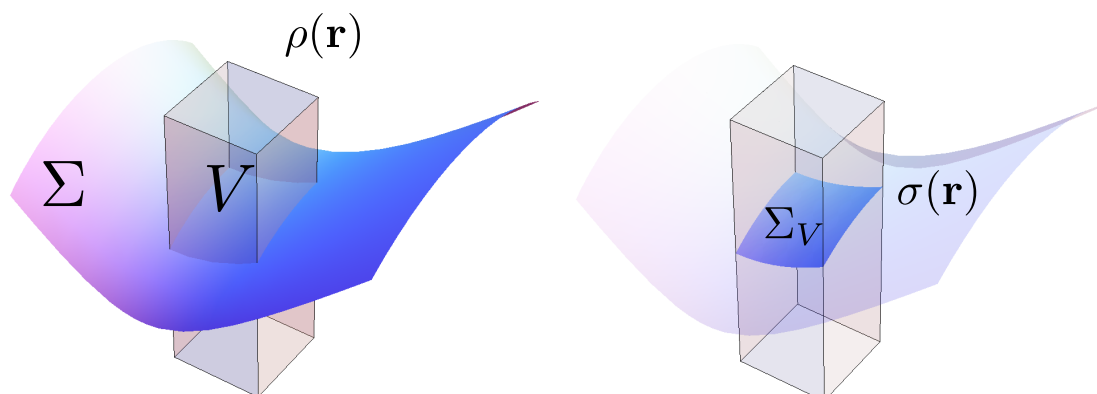
Es cierto que un conjunto de cargas puede representarse siempre con una densidad volumétrica ρ , y esto es útil si uno quiere demostrar teoremas o trabajar con la mayor generalidad posible. Pero en la práctica, tratándose de problemas específicos, esa generalidad suele ser innecesaria. ¿Qué es lo que sucede a veces? Digamos que les dan una distribución de carga en superficie, y ustedes, por querer aplicar la fórmula anterior, tratan por todos los medios de traducir esa densidad superficial a una densidad volumétrica, con el auxilio de deltas, jacobianos y escalones de Heaviside. Luego hacen la integral con todo el lío de deltas y escalones. En cualquiera de esos dos pasos es fácil equivocarse. La experiencia en parciales demuestra que es frecuente que quien tome ese camino se equivoque. Pero lo que queremos remarcar es que no es necesario traducir la densidad superficial a una volumétrica. Si la distribución de carga es superficial, sobre cierta superficie S , y está caracterizada por una densidad superficial $\sigma(\mathbf{r})$, directamente pueden escribir

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_S d^2r' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2)$$

Después de todo, si la distribución puede expresarse mediante deltas y escalones como cierta $\rho(\mathbf{r})$, *por definición* debe ser

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_S d^2r' \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3)$$

Esto es una consecuencia directa del modo en que uno define y, en la práctica, construye ρ . La integral de ρ en cualquier volumen V tiene que ser igual a la integral de σ sobre la parte de la superficie contenida en V ,



$$\int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma_V} d^2r \sigma(\mathbf{r}) \quad (4)$$

Estos volúmenes V incluyen también aquellos que no intersectan a la superficie, en cuyo caso la integral debe ser cero. Ven que esto lleva naturalmente al uso de deltas.

Lo mismo pasa si tienen una distribución de carga sobre una curva. No es necesario encontrar una ρ auxiliar. Ahí tendrán

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_C dl \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5)$$

Aquí dl es el elemento de longitud sobre la curva, de tal manera que λdl es la carga contenida en ese elemento. Y, finalmente, el caso más bajo al que podemos caer es el de cargas sueltas, aquí y allá,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (6)$$

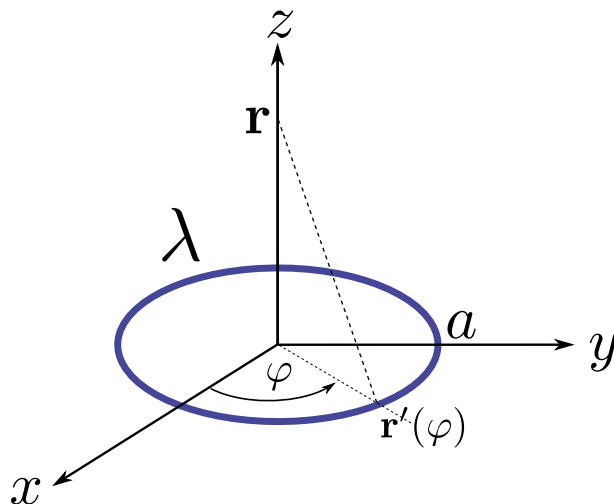
Y es el caso también más simple de traducir a una densidad volumétrica, si uno quisiera:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (7)$$

Aclaremos, sin embargo, que poder escribir una distribución cualquiera en términos de una ρ volumétrica no es un conocimiento inútil, pero hay que aplicarlo sólo cuando sea realmente necesario y no para complicar cálculos donde las cosas pueden hacerse de forma más directa. Lo que sí será importante luego, al ver problemas de contorno, es traducir distribuciones lineales o de cargas aisladas a distribuciones sobre superficies, puesto que las condiciones de contorno están dadas sobre superficies.

Resolvamos primero el problema 3b. Es un anillo de radio a cargado uniformemente con densidad lineal λ . Sólo se pide encontrar el potencial Φ sobre el eje del anillo, es decir en puntos

$$\mathbf{r} = z \hat{z}. \quad (8)$$



Hay que hacer la integral (5). Una forma cómoda de parametrización del anillo es el ángulo φ . La integral se escribirá cómo

$$\int_C dl \rightarrow \int_0^{2\pi} a d\varphi. \quad (9)$$

Cada punto del anillo queda dado por

$$\mathbf{r}'(\varphi) = a \hat{\rho}(\varphi), \quad (10)$$

donde $\hat{\rho}(\varphi)$ es el versor radial de las coordenadas cilíndricas. La otra cosa que necesitamos es la distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$,

$$|z \hat{z} - a \hat{\rho}(\varphi)| = \sqrt{z^2 + a^2}. \quad (11)$$

Tendremos

$$\Phi(0, 0, z) = \int_0^{2\pi} a d\varphi \frac{\lambda}{\sqrt{z^2 + a^2}}. \quad (12)$$

No hay mucho que hacer ahí,

$$\Phi(0, 0, z) = \frac{2\pi a \lambda}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{Q}{\sqrt{z^2 + a^2}}. \quad (13)$$

Este resultado debería ser evidente desde el principio, ya que todos los puntos del anillo están a la misma distancia del punto de observación. Para puntos muy lejanos al anillo, $|z| \gg a$, podemos escribir

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{1}{|z| \sqrt{1 + a^2/z^2}}. \quad (14)$$

La idea de hacer esto es la de tener escrito algo de la forma

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}}, \quad (15)$$

donde x es una cantidad pequeña, pues en este caso puede aproximarse

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} \approx 1 - \frac{1}{2} x. \quad (16)$$

Nosotros tendríamos $x = a^2/z^2$. Entonces,

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \approx \frac{1}{|z|} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} \right) = \frac{1}{|z|} - \frac{a^2}{2|z|^3}. \quad (17)$$

Si se acercan al anillo por el eje z desde el infinito, primero verán algo de la forma

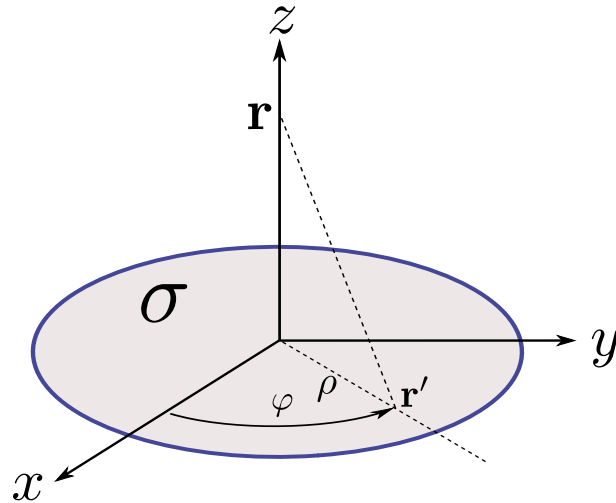
$$\Phi(0, 0, z) \approx \frac{Q}{|z|}. \quad (18)$$

Lo siguiente que podrán ver es el término que decae como $1/|z|^3$, y así sucesivamente, sólo que nosotros no hemos escrito el resto de los términos al hacer la aproximación (15). Esta forma de escribir el potencial como una serie de potencias de “1/distancia” es el llamado desarrollo multipolar. Ahora no lo estamos haciendo de manera general, puesto que sólo analizamos puntos sobre el eje z . El término que decae como $1/r$ se llama

monopolar, y está asociado a la carga total. Términos que decaen como $1/r^2$ están asociados al momento dipolar. En el problema del anillo esos términos no están, debido a la simetría de la distribución. Términos que decaen como $1/r^3$ son los asociados a los momentos cuadrupolares. En el caso del anillo esos términos sí están presentes.

El problema 3a en lugar de un anillo tiene un disco cargado uniformemente. Vamos a aplicar (2). De nuevo es cómodo parametrizar al disco usando coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{r}'(\rho, \varphi) = \rho \hat{\rho}(\varphi). \quad (19)$$



La integral de superficie será

$$\int_S d^2 r' \rightarrow \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \rho, \quad (20)$$

y la distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$,

$$|z \hat{z} - \rho \hat{\rho}(\varphi)| = \sqrt{z^2 + \rho^2}. \quad (21)$$

En definitiva

$$\begin{aligned} \Phi(0, 0, z) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \rho \frac{\sigma}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = 2\pi\sigma [\sqrt{z^2 + a^2} - \sqrt{z^2}] \\ &= 2\pi\sigma [\sqrt{z^2 + a^2} - |z|]. \end{aligned} \quad (22)$$

Podemos ver aquí también qué pasa para puntos lejanos al disco. De nuevo trataremos de construir una función donde aparezca un cantidad pequeña. Aquí la función en cuestión será

$$\sqrt{z^2 + a^2}, \quad (23)$$

y lo que haremos será como antes sacar factor común z^2 , para formar el cociente a^2/z^2 , que será mucho menor que 1 cuando $|z| \gg a$,

$$\sqrt{z^2 + a^2} = |z| \sqrt{1 + a^2/z^2}. \quad (24)$$

La función que ha quedado escrita puede aproximarse cerca del origen usando

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}. \quad (25)$$

Así,

$$|z|\sqrt{1+a^2/z^2} \approx |z| + \frac{a^2}{2|z|}. \quad (26)$$

Volviendo a la expresión para el potencial, ec. (22), encontramos

$$\Phi(0, 0, z) \approx 2\pi\sigma \left(|z| + \frac{a^2}{2|z|} - |z| \right) = \frac{\pi a^2 \sigma}{|z|}. \quad (27)$$

Pero $\pi a^2 \sigma$ es la carga total del disco, de manera que, para puntos muy lejanos a la distribución, volvemos a encontrar algo que es de la forma $Q/|z|$. Y este resultado puede generalizarse, y seguramente lo han visto en la clase de teoría. Muy lejos de una distribución de carga acotada, siempre que la carga total sea distinta de cero, el potencial es aproximadamente Q/r .

En el caso del disco podemos analizar también qué ocurre para puntos muy cercanos al centro del disco, cuando $|z| \ll a$. Ahora la cantidad pequeña es z^2/a^2 , y la podemos formar sacando factor común a^2 en la raíz que aparece en la ec. (22). Usando la misma aproximación (25), tendremos

$$\Phi(0, 0, z) \approx 2\pi\sigma \left(a + \frac{z^2}{2a} - |z| \right) = 2\pi\sigma a - 2\pi\sigma|z| + \pi\sigma \frac{z^2}{a}. \quad (28)$$

Si parten de $z = 0$, la primera dependencia en z que verán es el término proporcional a $|z|$,

$$\Phi(0, 0, z) \approx 2\pi\sigma a - 2\pi\sigma|z|. \quad (29)$$

¿Y qué es esto? A menos de una constante, es el potencial de un plano cargado uniformemente con σ . Y como cualquier distribución superficial de carga (obviamente, sobre una superficie suave) puede pensarse como una colección de discos infinitesimales, podemos enunciar ahora el siguiente resultado: justo sobre cualquier punto \mathbf{r} de una superficie cargada, la contribución al campo eléctrico de las cargas que se encuentran en la inmediata vecindad de ese punto es equivalente al campo de un plano con densidad de carga $\sigma(\mathbf{r})$. De este resultado quedan excluidas puntas, esquinas y bordes; tiene que ser una superficie suave.

El ítem (c) del ejercicio 3 puede consultarse con ventaja en el artículo "Finite line of charge", Am. J. Phys. 74 1120 (2006). Está en la página de la materia, en la sección de artículos sobre electrostática.

Pasemos al ejercicio 4 acerca del cálculo del campo magnético por integración directa,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (30)$$

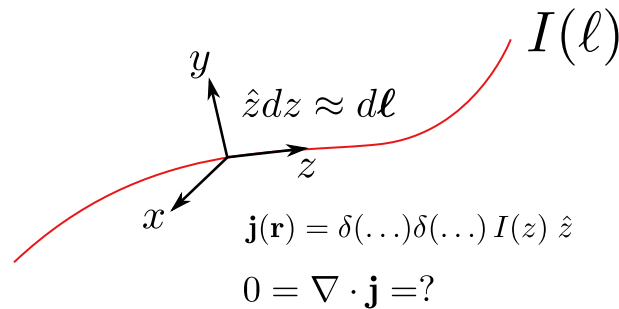
Pero hagamos una observación al estilo de la que hicimos antes. Si la corriente puede representarse por una distribución superficial $\boldsymbol{\kappa}$, no vale la pena transformarla en una distribución volumétrica para poder aplicar (30). Basta directamente con hacer la integral sobre la superficie,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_S d^2r' \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (31)$$

Y si tienen una línea con corriente, será

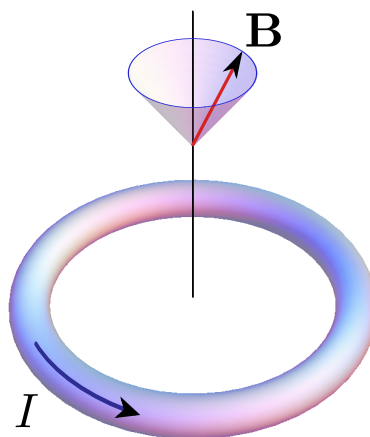
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_C d\ell I \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (32)$$

Noten que I no puede ser una función $I(\ell)$ sobre la curva C , porque se trata de un problema estático. Si la corriente variara con la posición, se estaría acumulando o perdiendo carga. La carga no puede irse para los costados, como en el caso de una corriente superficial o volumétrica. Ustedes pueden demostrar que para una corriente que circula en una curva, la condición $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, necesaria para que el problema sea estático, implica $\partial I / \partial \ell = 0$. La figura sugiere una manera de probar eso.



Empecemos por el ítem b del ejercicio 4: un espira de corriente. Se pide calcular \mathbf{B} sólo sobre el eje z . Ya no es como el potencial Φ , donde había que hacer una integral y listo. Ahora son 3 integrales, porque \mathbf{B} es un campo vectorial. ¿Pero será necesario aquí hacer las tres integrales? Podemos usar lo que hemos visto de simetrías para ahorrarnos el cálculo de un par de integrales cuyo resultado será cero. Es preferible poder decir de antemano que una integral es cero, y no llegar a ese resultado luego de hacer cuentas espantosas.

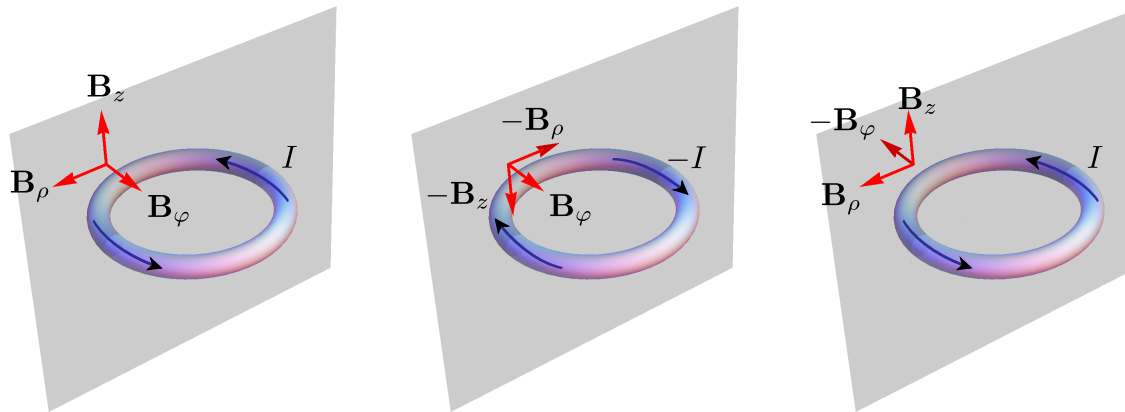
Inmediatamente vemos que sobre el eje z el campo tiene que ser paralelo al eje. Si no fuera así, frente a una rotación que deja invariante a la corriente, el campo se movería sobre un cono. El vector \mathbf{B} debe estar sobre el eje.



Esto vale para cualquier problema, eléctrico o magnético, que tenga simetría de rotación respecto de un eje: sobre el eje de simetría los campos tienen que ser paralelos al eje. Y noten que no es necesario que

esa simetría valga para una rotación en cualquier ángulo. Perfectamente podría ser una simetría discreta; por ejemplo, rotaciones en múltiplos enteros de π , o $\pi/2$, o $\pi/3$, etc. Piensen por ejemplo en un cubo: es obvio que no tiene ningún eje de simetría para rotaciones continuas, pero sí varios ejes de simetría para rotaciones discretas, y sobre esos ejes los campos tienen que tener esa misma dirección.

Aunque no vamos a calcular cosas fuera del eje, para este problema de la espira, ¿podemos decir algo acerca del campo \mathbf{B} en puntos fuera del eje z ? A primera vista, usando las transformaciones que hemos presentado hasta ahora, la cosa no parece muy factible. A falta de simetrías de rotación, eran las reflexiones las que permitían anular componentes de los campos. El problema es que, salvo reflexiones por el plano de la espira, no tenemos ninguna otra. Reflexiones por planos verticales que contengan al eje z cambian el signo de la corriente. ¿Pero qué pasa si a esas reflexiones las componemos con una transformación que sea, justamente, “cambiar el signo de la corriente”? La corriente en la espira vuelve a circular en el sentido original, recuperamos el sistema de partida. Sabemos cómo transforma \mathbf{B} en la reflexión. ¿Cómo transformará \mathbf{B} cuando cambiamos el signo de todas las corrientes? La respuesta es bastante evidente: \mathbf{B} tiene que cambiar de signo. La figura muestra lo que pasa si componemos las dos transformaciones para la espira, eligiendo un punto arbitrario,

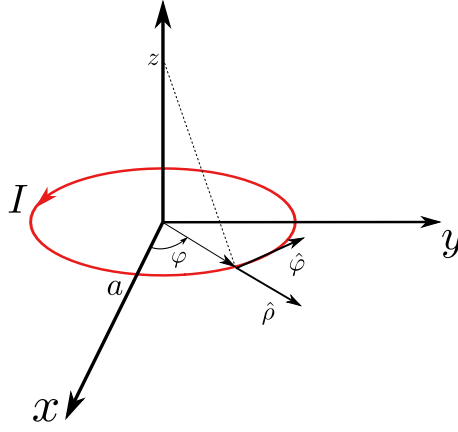


La reflexión invierte el sentido de circulación de la corriente y cambia el signo de las componentes de \mathbf{B} sobre el plano de reflexión. Como no es una simetría por sí sola, no podemos decir nada más. Pero luego de cambiar el signo de la corriente, volvemos a tener la espira original y las tres componentes de \mathbf{B} cambian de signo. Luego de estos dos pasos \mathbf{B}_ϕ transformó a $-\mathbf{B}_\phi$, lo que implica que debe anularse, y entonces

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_\rho(\rho, z) \hat{\rho} + B_z(\rho, z) \hat{z}. \quad (33)$$

Luego de este paréntesis volvamos al cálculo de \mathbf{B} sobre el eje z . Tenemos

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_C d\ell I \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (34)$$



Podemos escribir la integral sobre la espira usando como variable φ ,

$$\int_C d\ell \rightarrow \int_0^{2\pi} a d\varphi \hat{\varphi}. \quad (35)$$

Como sólo vamos a escribir la integral para la componente z del campo, tenemos que ver cuál es la componente z del producto vectorial $\hat{\varphi} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Escribamos

$$\mathbf{r}' = a \hat{\rho} \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = z \hat{z}. \quad (36)$$

Todos los versores corresponden al punto \mathbf{r}' , parametrizado por φ . Entonces

$$\hat{\varphi} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = z \hat{\varphi} \times \hat{z} - a \hat{\varphi} \times \hat{\rho} = z \hat{\rho} + a \hat{z}. \quad (37)$$

Sólo necesitamos la componente z . Como la distancia entre \mathbf{r} y \mathbf{r}' es constante, al final queda

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} a d\varphi \frac{Ia}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{2\pi a^2 I}{c(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}. \quad (38)$$

El campo muy lejos de la espira puede aproximarse escribiendo

$$\frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{|z|^3}. \quad (39)$$

Luego,

$$\mathbf{B}(0, 0, z) \approx \frac{2\pi a^2 I}{c|z|^3} \hat{z}, \quad (40)$$

y esto debe compararse con el campo de un dipolo magnético puntual $\mathbf{m} = m \hat{z}$ ubicado en el origen,

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{m}}{r^3}. \quad (41)$$

Sobre puntos del eje z ,

$$\mathbf{B}_m(0, 0, z) = \frac{2m}{|z|^3} \hat{z}. \quad (42)$$

La identificación que deberíamos hacer, comparando (40) con (42), es

$$m = \frac{\pi a^2 I}{c}. \quad (43)$$

Es probable que recuerden que el momento dipolar de una espira plana, circular o no, es Área \times corriente dividido c . Eso es lo que está diciendo este resultado, que también puede obtenerse a partir de la definición de \mathbf{m} para una espira:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_C \mathbf{r} \times I d\mathbf{l}. \quad (44)$$

Para la espira circular es $\mathbf{r} = a\hat{\rho}$, $d\mathbf{l} = \hat{\varphi} a d\varphi$,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_0^{2\pi} a\hat{\rho} \times I\hat{\varphi} a d\varphi = \frac{a^2 I}{2c} \int_0^{2\pi} \hat{z} d\varphi = \frac{\pi a^2 I}{c} \hat{z}. \quad (45)$$

Es el resultado de antes.

El ítem (a) del ejercicio 4 pide calcular \mathbf{B} sobre el eje de un disco cargado en rotación. Puede pensarse como una colección de espiras y usarse los resultados del problema anterior, o atacarlo directamente haciendo la integral de superficie

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_S d^2r' \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (46)$$

La integral de superficie puede escribirse en cilíndricas,

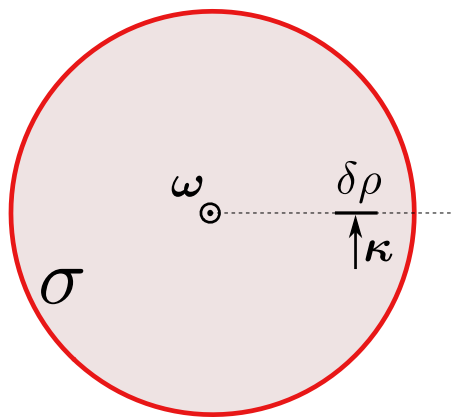
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \rho \boldsymbol{\kappa}(\rho, \varphi) \times \frac{\mathbf{r} - \rho\hat{\rho}}{|\mathbf{r} - \rho\hat{\rho}|^3}. \quad (47)$$

Hay que encontrar $\boldsymbol{\kappa}$. No hay dificultad en ver que $\boldsymbol{\kappa}$ está en la dirección de $\hat{\varphi}$, pues las cargas se mueven siguiendo esa dirección. Para averiguar la magnitud de $\boldsymbol{\kappa}$ tenemos que calcular δI , la carga que atraviesa un elemento de longitud $\delta\rho\hat{\rho}$ por unidad de tiempo. Elegimos esa dirección porque la corriente es perpendicular a $\hat{\rho}$. Deben convencerse de que

$$\delta I = \omega\rho\sigma\delta\rho. \quad (48)$$

Entonces

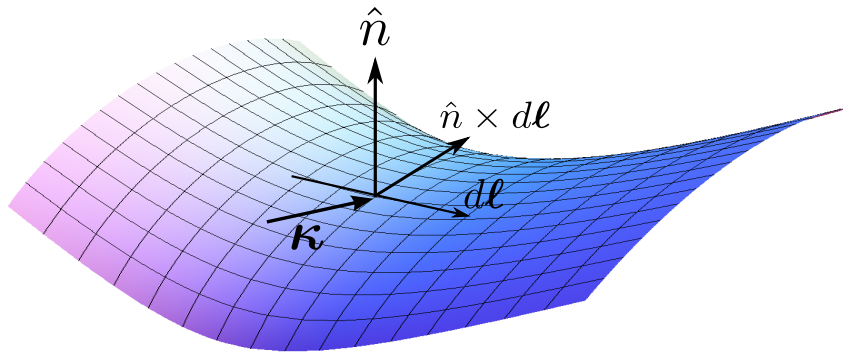
$$\boldsymbol{\kappa}\delta\rho = \delta I \Rightarrow \boldsymbol{\kappa} = \omega\rho\sigma. \quad (49)$$



Podemos llegar a este resultado más formalmente. La corriente que atraviesa por unidad de tiempo y longitud cualquier elemento de longitud $\delta\ell$ sobre una superficie viene dada por

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \delta\boldsymbol{\ell}) = \delta I. \quad (50)$$

El producto vectorial lo que hace es construir un vector normal al elemento de longitud.



Si queremos el flujo de carga hay que hacer el producto escalar de $\boldsymbol{\kappa}$ con ese vector. Casi todo el trabajo está en ver cuánto vale δI . Es eso en definitiva lo único que hay que saber hacer para encontrar $\boldsymbol{\kappa}$. Si lo quieren ver de manera general, deberían demostrar que

$$\delta I = \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \delta\boldsymbol{\ell}). \quad (51)$$

Como $\delta\ell$ es arbitrario, la comparación de (50) y (51) da

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (52)$$

En el caso del disco, $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \omega\rho\hat{\boldsymbol{\phi}}$, y obtienen (49). La expresión (52) es análoga la expresión para \mathbf{j} en el caso de una corriente volumétrica producida por un flujo de cargas que tiene asociada una densidad ρ ,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (53)$$

Pero volviendo al problema del disco en rotación, deberían poder escribir

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho\rho (\omega\rho\sigma) \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \frac{z\hat{\mathbf{z}} - \rho\hat{\boldsymbol{\rho}}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (54)$$

Como sabemos que la única componente no nula de \mathbf{B} sobre el eje z es B_z , solo hay ocuparse de calcular la parte que viene del producto vectorial de $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ con $\hat{\boldsymbol{\rho}}$,

$$B_z(0, 0, z) = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho\rho (\omega\rho\sigma) \frac{\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (55)$$

Antes de hacer la integral podríamos preguntarnos si las unidades, al menos, están bien. Observen que dentro de la integral aparece un $\rho^3 d\rho$, pero también aparece dividiendo una longitud³. De manera que el resultado de

la integral tendrá las unidades sólo de $\omega\rho\sigma/c$. Pero $\omega\rho$ tiene unidades de velocidad, que se cancelan con las de c . Así que todo termina teniendo las unidades de σ , es decir, carga por unidad de superficie, carga sobre longitud al cuadrado. Y esas son las unidades de los campos, tanto de \mathbf{E} como de \mathbf{B} .

Al final queda,

$$B_z(0, 0, z) = \frac{2\pi\omega\sigma}{c} \left(\frac{2z^2 + a^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 2|z| \right). \quad (56)$$

Para analizar esto a grandes distancias saquemos factor común z^2 y formemos la cantidad pequeña $x = a^2/z^2$,

$$\left(\frac{2z^2 + a^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 2|z| \right) = |z| \left(\frac{2 + x}{\sqrt{1 + x}} - 2 \right). \quad (57)$$

Ahora escribamos

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots \quad (58)$$

Al formar el producto con $2 + x$ conservemos términos de hasta orden x^2 ,

$$(2 + x) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots \right) \approx \frac{x^2}{4}. \quad (59)$$

Los términos constantes y lineales se cancelan. En definitiva, para $z \gg a$

$$B_z(0, 0, z) \approx \frac{\pi\omega\sigma}{2c} \frac{a^4}{|z|^3}. \quad (60)$$

Para comprobar las unidades, escribámoslo así

$$B_z(0, 0, z) \approx \frac{1}{2} (\pi a^2 \sigma) \frac{\omega a}{c} \frac{a}{|z|^3}, \quad (61)$$

lo que evidentemente tiene unidades de Q/L^2 . De nuevo podemos comparar (60) con el campo de un dipolo $m \hat{z}$ sobre puntos del eje z , ec. (42). Lo que obtenemos de esa comparación es un valor de m ,

$$m = \frac{\pi\omega\sigma}{4c} a^4. \quad (62)$$

Esto debería coincidir con el cálculo directo de m para una distribución superficial,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_S d^2r' \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\kappa}. \quad (63)$$

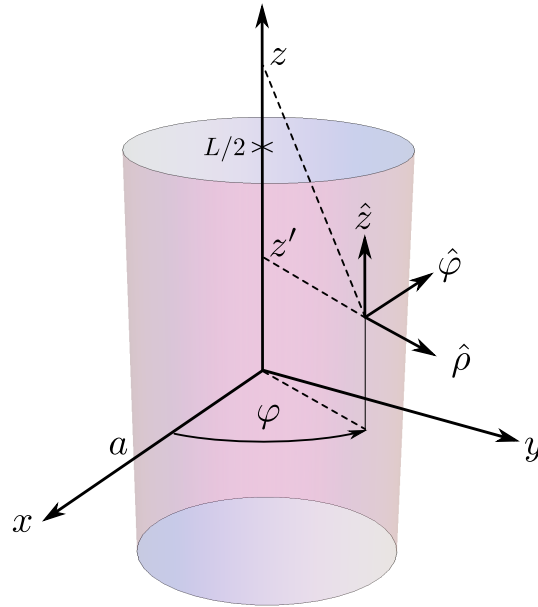
Para el disco

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho \rho \hat{\rho} \times (\omega\rho\sigma) \hat{\varphi} \\ &= \frac{\omega\sigma}{2c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \rho^3 \hat{z} \\ &= \frac{\pi\omega\sigma}{4c} a^4 \hat{z}. \end{aligned} \quad (64)$$

Es el resultado de antes.

Problema 6. El solenoide finito. Para calcular el campo sobre el eje z , lo mismo que valía para la espira y el disco vale para el solenoide: el campo sobre el eje z debe estar en z . Dividamos el problema en partes. Queremos calcular

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_S d^2r' \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (65)$$



La integral es sobre el solenoide. Podemos escribirla así

$$\int_S d^2r' \rightarrow \int_0^{2\pi} a d\varphi \int_{-L/2}^{L/2} dz'. \quad (66)$$

El punto \mathbf{r}' se escribirá como

$$\mathbf{r}'(\varphi, z') = a \hat{\rho}(\hat{\varphi}) + z' \hat{z}. \quad (67)$$

Ya vimos la clase pasada que

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}') = nI \hat{\varphi}(\varphi). \quad (68)$$

Necesitamos sólo la componente z del producto vectorial de $\boldsymbol{\kappa}$ con $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$,

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = nI \hat{\varphi} \times [(z - z') \hat{z} - a \hat{\rho}] = nI [(z - z') \hat{\rho} + a \hat{z}]. \quad (69)$$

Por último, la distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ es

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}. \quad (70)$$

Juntando todas las piezas, queda

$$B_z(0, 0, z) = \frac{nIa^2}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{1}{[(z - z')^2 + a^2]^{3/2}}. \quad (71)$$

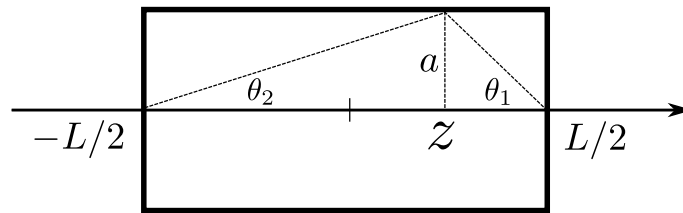
Ahora usamos

$$\int dz' \frac{1}{[(z - z')^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{z' - z}{a^2 \sqrt{(z - z')^2 + a^2}}. \quad (72)$$

La integral en φ en (71) es inmediata porque nada depende de φ . Finalmente

$$B_z(0, 0, z) = \frac{2\pi n I}{c} \left[\frac{L/2 - z}{\sqrt{(L/2 - z)^2 + a^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{(L/2 + z)^2 + a^2}} \right]. \quad (73)$$

Los cocientes dentro del corchete corresponden a los cosenos de los dos ángulos que muestra la figura,



$$B_z(0, 0, z) = \frac{2\pi n I}{c} [\cos \theta_1 + \cos \theta_2]. \quad (74)$$

Pueden verificar que eso es cierto independientemente de que el punto z quede dentro o fuera del solenoide. Si está dentro del solenoide, tanto θ_1 como θ_2 toman valores entre 0 y $\pi/2$, y sus cosenos son positivos. Si sobrepasan el extremo derecho del solenoide, θ_2 sigue estando entre 0 y $\pi/2$, pero θ_1 estará entre $\pi/2$ y π , y su coseno será negativo. Sucederá a la inversa si el punto z se encuentra a la izquierda del solenoide. Fíjense entonces que si $|z| \gg L/2$, uno de los dos cosenos es negativo, y los dos tienden en valor absoluto a 1, de manera que tenderán a cancelarse. Ustedes pueden repetir aquí el cálculo de B_z a grandes distancias sobre el eje e identificar el momento magnético del solenoide. Tendría que dar $nLI\pi a^2/c$, como si se tratará del momento total de $N = nL$ espiras.

Otra cosa que pueden ver es que si fijan z y hacen $L \rightarrow \infty$, los dos cosenos tienden a 1 y, al menos sobre el eje, reobtienen el campo del solenoide infinito,

$$B_z(0, 0, z) \rightarrow \frac{4\pi n I}{c}. \quad (75)$$

El punto siguiente pide encontrar el campo radial cerca del centro del solenoide, asumiendo que $a \ll L$. Ésta es la parte verdaderamente difícil del problema. Si intentan calcular el campo exactamente para luego aplicarle las aproximaciones, van a quedarse trabados en las integrales. Vamos a mostrarles dos caminos para resolver este problema, uno que se acerca más al cálculo directo del campo, y otro, mucho más eficaz, en donde prácticamente no hace falta calcular nada nuevo.

El método directo. Queremos calcular la parte radial del campo, es decir $\mathbf{B}_\rho(\mathbf{r}) = B_\rho(\mathbf{r}) \hat{\rho}$. Por simetría de rotación sabemos que esto no puede depender de la coordenada φ ,

$$B_\rho(\mathbf{r}) = B_\rho(\rho, z). \quad (76)$$

Usaremos, como antes,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_S d^2r' \kappa(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (77)$$

Podemos plantear el cálculo para cualquier φ , por ejemplo para $\varphi = 0$, es decir tomando $\mathbf{r} = x \hat{x} + z \hat{z}$. La componente radial de \mathbf{B} en ese punto coincide con la componente x . Necesitamos entonces la componente x del producto vectorial de κ con $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Escribamos $\kappa = \kappa \hat{\varphi}$ y $\mathbf{r}' = a \hat{\rho} + z' \hat{z}$, donde está claro que ahora todos los versores se refieren al punto \mathbf{r}' . Entonces

$$\begin{aligned} \kappa \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \kappa \hat{\varphi} \times [x \hat{x} + (z - z') \hat{z} - a \hat{\rho}] \\ &= -\kappa x \cos \varphi \hat{z} + \kappa(z - z') \hat{\rho} + \kappa a \hat{z}. \end{aligned} \quad (78)$$

Buscamos la componente x , así que escribamos $\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$, donde, como hemos dicho antes, φ es el asociado a \mathbf{r}' . En definitiva,

$$\left[\kappa \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]_x = (z - z') \cos \varphi. \quad (79)$$

Necesitamos también la distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \\ &= \sqrt{x^2 + z^2 + a^2 + z'^2 - 2(xa \cos \varphi + zz')}. \end{aligned} \quad (80)$$

Juntando todo queda

$$B_x(x, 0, z) = \frac{nI}{c} \int_0^{2\pi} ad\varphi \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{(z - z') \cos \varphi}{\left[x^2 + z^2 + a^2 + z'^2 - 2(xa \cos \varphi + zz') \right]^{3/2}}. \quad (81)$$

Esta integral no es nada sencilla. Pero lo que buscamos es el campo cerca del centro del solenoide, $x \ll a$, $z \ll L/2$ y $z \ll a$ [falta aclarar esta última desigualdad en el enunciado de la guía], y además en algún momento también pediremos que el solenoide sea *largo*, es decir, $a \ll L$. Pero empecemos de a poco. Ya que el punto \mathbf{r} donde se quiere calcular el campo está cerca del centro del solenoide y el punto \mathbf{r}' se mueve sobre la superficie del solenoide, podemos asumir que siempre vale $r \ll r'$. Entonces desarrollemos $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3/2}$ cerca de $\mathbf{r} = 0$. Pueden completar los pasos que llevan a esta expresión, válida hasta orden $(r/r')^2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3/2}} &= \left[r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \right]^{-3/2} \\ &\approx \frac{1}{r'^3} \left[1 + \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^2} + \frac{15(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{2r'^4} - \frac{3r^2}{2r'^2} \right]. \end{aligned} \quad (82)$$

Se trata de hacer Taylor alrededor de $r = 0$. Como hemos elegido $\mathbf{r} = x \hat{x} + z \hat{z}$, el producto escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$ es

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = xa \cos \varphi + zz'. \quad (83)$$

Observen que al hacer la integral en φ ,

$$I_\varphi = \int_0^{2\pi} ad\varphi (z - z') \cos \varphi \frac{1}{r'^3} \left[1 + \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^2} + \frac{15(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{2r'^4} - \frac{3r^2}{2r'^2} \right], \quad (84)$$

todos los términos en donde aparezca una potencia impar de $\cos \varphi$ van a dar cero. Queda para ustedes ver que los únicos términos que sobreviven a la integral en φ son

$$I_\varphi = a(z - z') \left[\frac{3}{r'^5} + \frac{15}{r'^7} z z' \right] a x \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \right) = a(z - z') \left[\frac{3}{r'^5} + \frac{15}{r'^7} z z' \right] a x \pi. \quad (85)$$

Para hacer la integral en z' también podemos aprovechar la simetría del integrando, descartando todos los términos que sean impares en z' , ya que la integral va de $-L/2$ a $L/2$. Finalmente queda

$$B_x(x, 0, z) \approx \frac{nIa^2x\pi}{c} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \left[\frac{3z}{r'^5} - 15 \frac{z z'^2}{r'^7} \right]. \quad (86)$$

Puesto que $r' = (a^2 + z'^2)^{1/2}$, las únicas integrales que hay que consultar son

$$\begin{aligned} \int dx \frac{1}{(1+x^2)^{5/2}} &= \frac{x(3+2x^2)}{3(1+x^2)^{3/2}}, \\ \int dx \frac{x^2}{(1+x^2)^{7/2}} &= \frac{x^3(5+2x^2)}{15(1+x^2)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (87)$$

Al final varias cosas se acomodan y se obtiene algo relativamente sencillo,

$$B_x(x, 0, z) \approx \frac{nIa^2xz\pi}{c} \frac{3L}{\left(a^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{5/2}}. \quad (88)$$

Y ahora hagamos $L \gg a$,

$$B_x(x, 0, z) \approx \frac{nIa^2xz\pi}{c} \frac{3L}{L^5/32} = \frac{96\pi nI}{c} \frac{a^2xz}{L^4}. \quad (89)$$

Nosotros tomamos $\mathbf{r} = x \hat{x} + z \hat{z}$ por conveniencia, pero, debido a la simetría de rotación, este resultado sigue siendo válido para la componente radial de \mathbf{B} en cualquier punto de la forma $\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$

$$B_\rho(\rho, z) \approx \frac{96\pi nI}{c} \frac{a^2\rho z}{L^4}. \quad (90)$$

Y este es el resultado al que había que llegar.

El otro método, para obtener el campo radial cerca del centro del solenoide utiliza la información contenida en la ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (91)$$

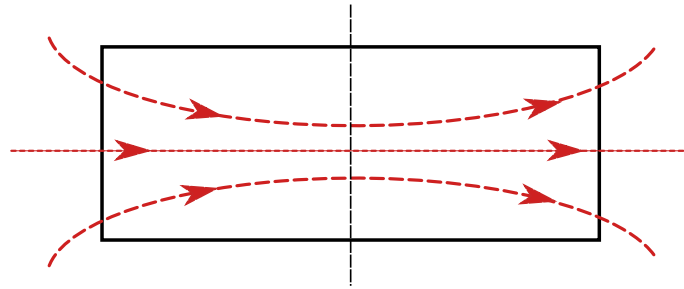
y el resultado obtenido al comienzo para $B_z(0, 0, z)$. Teniendo en cuenta que $B_\varphi = 0$ y que B_ρ y B_z son funciones sólo de ρ y z , la ecuación para la divergencia de \mathbf{B} en cilíndricas se escribe como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (92)$$

Teniendo información sobre B_z podemos decir algo acerca de B_ρ . Analicemos estas dos funciones cerca del origen. Podemos aproximarlas mediante un desarrollo en potencias de ρ y z ,

$$\begin{aligned} B_\rho(\rho, z) &= a_0 + a_\rho \rho + a_z z + a_{\rho\rho} \rho^2 + a_{zz} z^2 + a_{\rho z} \rho z + \dots, \\ B_z(\rho, z) &= b_0 + b_\rho \rho + b_z z + b_{\rho\rho} \rho^2 + b_{zz} z^2 + b_{\rho z} \rho z + \dots \end{aligned} \quad (93)$$

Cada término está asociado a ciertas derivadas parciales de los campos. Es simplemente un Taylor alrededor del origen. Pero por simetría sabemos que las líneas de campo deben tener la siguiente forma,



Vemos que B_ρ debe ser una función impar de z , en particular tiene que anularse en $z = 0$, lo que en conjunto implica

$$a_0 = a_\rho = a_{\rho\rho} = a_{zz} = 0. \quad (94)$$

Sobre el eje z ($\rho = 0$) sabemos también que $B_\rho = 0$, lo que agrega la siguiente información

$$a_z = 0. \quad (95)$$

Respecto de B_z , podemos decir que debe ser una función par de z , lo que implica

$$b_z = b_{\rho z} = 0. \quad (96)$$

Con esto podemos eliminar términos en los dos desarrollos anteriores, quedándonos con los que respetan estas simetrías,

$$B_\rho(\rho, z) = a_{\rho z}\rho z + \dots,$$

$$B_z(\rho, z) = b_0 + b_{\rho\rho}\rho^2 + b_{zz}z^2 + \dots \quad (97)$$

Si escriben la ecuación para la divergencia usando estas formas para los campos, deberían obtener

$$a_{\rho z} = -b_{zz}. \quad (98)$$

Y podemos hacer algo más, aunque no lo necesitaremos luego, que es usar la otra ecuación conocida, la del rotor de \mathbf{B} . Para un campo con simetría cilíndrica en una región sin fuentes, la única ecuación no trivial para el rotor es la de la componente φ :

$$0 = [\nabla \times \mathbf{B}]_\varphi = \frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho}. \quad (99)$$

Si reescriben esta ecuación usando los desarrollos (97), y si comparan potencias de ρ y de z encontrarán que

$$b_\rho = 0 \quad \text{y} \quad 2b_{\rho\rho} = a_{\rho z}. \quad (100)$$

Así que en definitiva, si juntamos todo queda

$$B_\rho(\rho, z) = -b_{zz}\rho z + \dots,$$

$$B_z(\rho, z) = b_0 - \frac{1}{2}b_{zz}\rho^2 + b_{zz}z^2 + \dots \quad (101)$$

Fíjense que todos los coeficientes han quedado en términos de las derivadas de B_z respecto de z . Aquí b_{zz} , puesto que era originalmente el coeficiente asociado a z^2 en el desarrollo alrededor del origen, estará dado por

$$b_{zz} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \Big|_{\rho=z=0} \quad (102)$$

Y ya está. Conocen la función B_z sobre el eje z ,

$$B_z(0, 0, z) = \frac{2\pi n I}{c} \left[\frac{L/2 - z}{\sqrt{(L/2 - z)^2 + a^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{(L/2 + z)^2 + a^2}} \right], \quad (103)$$

pueden calcular su derivada segunda y evaluarla en $z = 0$. El resultado es

$$b_{zz} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \Big|_{\rho=z=0} = -\frac{\pi n I}{c} \frac{3a^2 L}{\left(a^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{5/2}}. \quad (104)$$

El campo B_ρ cerca del origen es entonces

$$B_\rho(\rho, z) \approx \rho z a_{\rho z} = -\rho z b_{zz} = \frac{\pi n I \rho z}{c} \frac{3a^2 L}{\left(a^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{5/2}}. \quad (105)$$

Con la identificación $\rho \rightarrow x$, esta expresión es idéntica a la (88). El caso $L \gg a$ se deduce como antes. Por la misma plata, podemos escribir B_z cerca del centro del solenoide, usando la segunda ec. (101), donde b_0 es $B_z(0, 0)$, algo que podemos calcular a partir de (103). Resulta

$$B_z(\rho, z) \approx \frac{2\pi n I}{c} \frac{L}{\left(\frac{L^2}{4} + a^2\right)^{1/2}} - \frac{\pi n I}{c} \frac{3a^2 L}{\left(a^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{5/2}} \left(z^2 - \frac{1}{2}\rho^2\right). \quad (106)$$

Y si el solenoide es muy largo,

$$B_z(\rho, z) \approx \frac{4\pi n I}{c} - \frac{96\pi n I}{c} \frac{a^2}{L^4} \left(z^2 - \frac{1}{2}\rho^2\right) = B_\infty \left[1 - \frac{24a^2}{L^4} \left(z^2 - \frac{1}{2}\rho^2\right)\right], \quad (107)$$

donde B_∞ es el campo dentro de un solenoide infinito.

En la tercera edición del Jackson el problema que acabamos de ver figura distribuido entre los problemas 5.3, 5.4 y 5.5. El 5.3 pide lo mismo que el ítem (a) del problema de la guía. Pero la forma de llegar al resultado para el campo radial, cosa que se pide en el ejercicio 5.5, es a través del ejercicio 5.4. Este ejercicio es una generalización del método que vimos antes para encontrar B_ρ a partir de B_z , usando que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

5.4 A magnetic induction \mathbf{B} in a current-free region in a uniform medium is cylindrical symmetric with components $B_z(\rho, z)$ and $B_\rho(\rho, z)$ and with a known $B_z(0, z)$ on the axis of symmetry. The magnitude of the axial field varies slowly in z .

(a) Show that near the axis the axial and radial components of magnetic induction are approximately

$$B_z(\rho, z) \approx B_z(0, z) - \left(\frac{\rho^2}{4}\right) \left[\frac{\partial^2 B_z(0, z)}{\partial z^2} \right] + \dots$$

$$B_\rho(\rho, z) \approx -\left(\frac{\rho}{2}\right) \left[\frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} \right] + \left(\frac{\rho^3}{16}\right) \left[\frac{\partial^3 B_z(0, z)}{\partial z^3} \right] + \dots$$

(b) What are the magnitudes of the neglected terms, or equivalently what is the criterion defining “near” the axis?

Para resolverlo deberían partir como antes del par de ecuaciones $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, escritas en cilíndricas. A diferencia de lo que ya hicimos, lo que hay que hacer ahora no es un desarrollo en potencias de ρ y z , sino únicamente de ρ . Es un lindo ejercicio, que permite ver de paso que si el solenoide es lo suficientemente largo, las aproximaciones serán buenas incluso para valores de ρ cercanos a a (¿por qué?).

Los que aspiren al grado de solenoidólogos deberían hacer los otros ejercicios del 5.1 al 5.5 (ha quedado dicho que de la 3ra edición), y que adjuntamos para su comodidad.

5.1 Starting with the differential expression

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

for the magnetic induction at the point P with coordinate \mathbf{x} produced by an increment of current $I d\mathbf{l}'$ at \mathbf{x}' , show explicitly that for a closed loop carrying a current I the magnetic induction at P is

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega$$

where Ω is the solid angle subtended by the loop at the point P . This corresponds to a magnetic scalar potential, $\Phi_M = -\mu_0 I \Omega / 4\pi$. The sign convention for the solid angle is that Ω is positive if the point P views the “inner” side of the surface spanning the loop, that is, if a unit normal \mathbf{n} to the surface is defined by the direction of current flow via the right-hand rule, Ω is positive if \mathbf{n} points *away* from the point P , and negative otherwise. This is the same convention as in Section 1.6 for the electric dipole layer.

5.2 A long, right cylindrical, ideal solenoid of arbitrary cross section is created by stacking a large number of identical current-carrying loops one above the other, with N coils per unit length and each loop carrying a current I . [In practice such a solenoid could be wound on a mandrel machined to the arbitrary cross section. After the coil was made rigid (e.g., with epoxy), the mandrel would be withdrawn.]

- (a) In the approximation that the solenoidal coil is an ideal current sheet and infinitely long, use Problem 5.1 to establish that at any point inside the coil the magnetic field is axial and equal to

$$H = NI$$

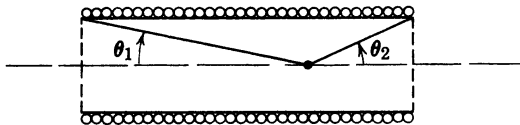
and that $H = 0$ for any point outside the coil.

- (b) For a realistic solenoid of circular cross section of radius a ($Na \gg 1$), but still infinite in length, show that the “smoothed” magnetic field just outside the solenoid (averaged axially over several turns) is not zero, but is the same in magnitude and direction as that of a single wire on the axis carrying a current I , even if $Na \rightarrow \infty$. Compare fields inside and out.

5.3 A right-circular solenoid of finite length L and radius a has N turns per unit length and carries a current I . Show that the magnetic induction on the cylinder axis in the limit $NL \rightarrow \infty$ is

$$B_z = \frac{\mu_0 NI}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

where the angles are defined in the figure.



Problem 5.3

- 5.5** (a) Use the results of Problems 5.4 and 5.3 to find the axial and radial components of magnetic induction in the *central region* ($|z| \ll L/2$) of a long uniform solenoid of radius a and ends at $z = \pm L/2$, including the value of B_z just inside the coil ($\rho = a^-$).
- (b) Use Ampère’s law to show that the longitudinal magnetic induction just outside the coil is approximately

$$B_z(\rho = a^+, z) \approx -\left(\frac{2\mu_0 NI a^2}{L^2}\right)\left(1 + \frac{12z^2}{L^2} - \frac{9a^2}{L^2} + \dots\right)$$

For $L \gg a$, the field outside is negligible compared to inside. How does this axial component compare in size to the azimuthal component of Problem 5.2b?

- (c) Show that at the end of the solenoid the magnetic induction near the axis has components

$$B_z \approx \frac{\mu_0 NI}{2}, \quad B_\rho \approx \pm \frac{\mu_0 NI}{4} \left(\frac{\rho}{a}\right)$$