Física Teórica 1 - 1er cuatrimestre de 2010 - 1er parcial (19/5)

1. Considere la región limitada por dos semiplanos que se intersectan a lo largo del eje z formando un ángulo α entre 0 y 2π, fig. 1. En cilíndricas, $0 \leq \rho < \infty$, $-\infty < z < \infty$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$.

   (a) Encuentre la función de Green $G_\alpha(\rho, \varphi, z, \rho', \varphi', z')$ para el problema de Dirichlet en esta región. La solución debe darse como un desarrollo que involucre las funciones de Bessel J_ν. [5 pts]

   (b) A partir del resultado anterior, escriba su solución para el caso $\alpha = \pi$, en donde el problema se reduce al de la función de Green para el semiespacio $y \geq 0$. [1 pt]

   (c) Usted sabe que la función de Green para todo el espacio puede escribirse como

   $$G(\rho, \varphi, z, \rho', \varphi', z') = \int_0^\infty dk \left[J_0(k\rho) J_0(k\rho') \, + 2 \sum_{\nu>0} \, J_\nu(k\rho) J_\nu(k\rho') \, \cos \nu(\varphi - \varphi') \right] e^{-k|z-z'|}$$

   Usando este resultado y el método de imágenes escriba la función de Green del problema de Dirichlet para el semiespacio $y \geq 0$. [2,5 pts]

   (d) Muestre que las dos funciones de Green encontradas en los ítems (b) y (c) son idénticas. [1,5 pts]

2. Un cilindro de alto L y radio a está a potencial cero, salvo por dos discos de radio $b \leq a$ centrados en sus tapas. Sobre el disco en la tapa superior, el potencial es V, y en la inferior, $-V$, fig. 2.

   (a) Encuentre el potencial electrostático dentro del cilindro. [6 pts]

   (b) Suponiendo ahora que los potenciales en las tapas varían en el tiempo con un factor $e^{i\omega t}$, encuentre los campos eléctrico y magnético dentro del cilindro en la aproximación cuasiestacionaria, llegando al menor orden que sea necesario para obtener un resultado no nulo para ambos campos. Justifique con argumentos de simetría cada elección de la forma funcional de los campos. [4 pts]

   Fórmulas útiles: $\int x J_0(x)\, dx = x J_1(x)$.

3. Un imán está compuesto por un núcleo esférico de radio a y densidad de magnetización $M_1 \hat{z}$, rodeado por una cáscara de radio interno a y externo $b \geq a$ con magnetización $M_2 \hat{z}$, fig. 3.

   (a) Encuentre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio. [5 pts]

   (b) Verifique explícitamente en su solución que en los siguientes casos se recuperan los resultados conocidos del imán esférico homogéneo: $a = b$, $a = 0$, $M_2 = 0$, $M_1 = M_2$. [1,5 pts]

   (c) Si la magnetización del núcleo fuera $M_1 \hat{x}$, y la de la cáscara continuase siendo $M_2 \hat{z}$, con $0 < M_1$ y $0 < a < b$. Encuentre M_2 para que se anule $\mathbf{B}$ fuera del imán, si eso fuera posible, o, caso contrario, diga por qué no es posible encontrarlo. [3,5 pts]

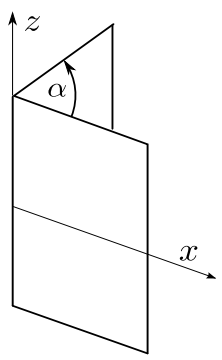

fig. 1

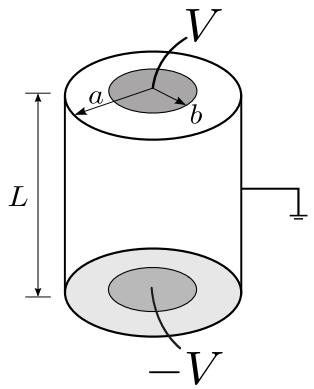

fig. 2

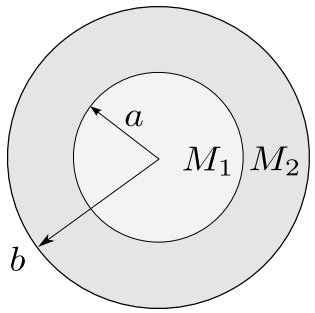

fig. 3