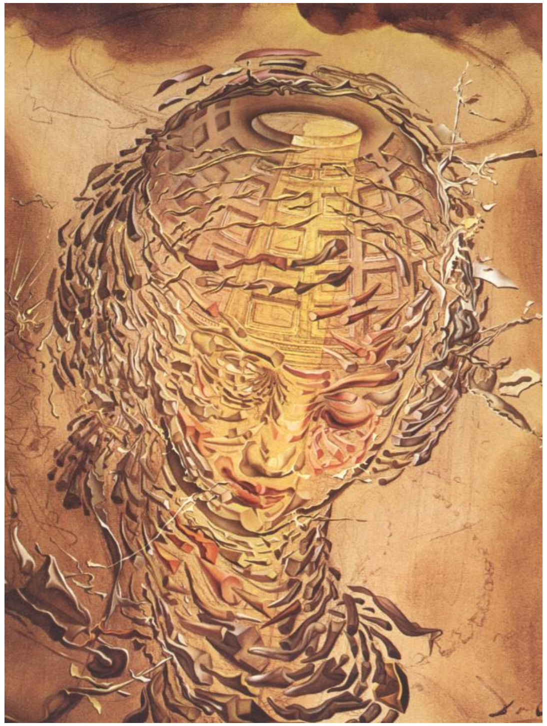
Markov 1



Markov

Ajustemos la notacion

Sea una variable estocastica Y con un espacio muestral

asociado $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$

$\underline{P_1(y_1, t)}$ = densidad de probabilidad de
que la variable estocastica
tome el valor y_1 a tiempo t

$P_2(y_1, t_1; y_2, t_2) =$ densidad de probabilidad conjunta de que la variable estocastica tome el valor y_1 a tiempo t_1 y el valor y_2 a tiempo t_2

$P_n(y_1, t_1; y_2, t_2; \ldots; y_n, t_n) =$ densidad de probabilidad conjunta que la variable ...

Las densidades de probabilidad satisfacen

$$P_n \geq 0$$

Pueden ser reducidas

$$\int P_n(y_1,t_1;y_2,t_2;\ldots;y_n,t_n)dy_n = P_n(y_1,t_1;y_2,t_2;\ldots;y_{n-1},t_{n-1})$$

Ademas son normalizables

$$\int P_1(y_1,t_1)dy_1 = 1$$

Pueden ser continuas o discretas

Los momentos dependientes del tiempo quedan definidos por

$$\langle y_1(t_1), y_2(t_2), \ldots, y_n(t_n)\rangle =$$
$$= \int \ldots \int y_1 y_2 \ldots y_n P_n(y_1, t_1; y_2, t_2; \ldots; y_n, t_n) dy_1 dy_2 \ldots dy_n$$

de donde obtenemos informacion respecto de correlaciones a diferentes tiempos.

Proceso estacionario :

$$P_n(y_1, t_1; y_2, t_2; \ldots; y_n, t_n) = P_n(y_1, (t_1 + \tau); y_2, (t_2 + \tau); \ldots; y_n, (t_n +$$

Para todo n y τ

Entonces en este caso

$$P_1(y_1, t_1) = P_1(y_1)$$

Ademas en este caso $\langle y_1(t_1), y_2(t_2), \ldots, y_n(t_n) \rangle$ depende solo de

$|t_1 - t_1|$

Sea ahora la probabilidad condicional

$P_{1/1}(y_1, t_1 | y_2, t_2)$ = es la densidad de probabilidad condicional de que la variable estocastica Y adopte el valor y_2 a tiempo t_2 si tomo el valor y_1 a tiempo t_1

Esta definida por

$$\boxed{P_1(y_1,t_1)P_{1/1}(y_1,t_1|y_2,t_2) = P_2(y_1,t_1;y_2,t_2)}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de reduccion

$$\boxed{\int P_1(y_1,t_1)P_{1/1}(y_1,t_1|y_2,t_2)dy_1 = P_1(y_2,t_2)}$$

Ademas $P_{1/1}(y_1,t_1|y_2,t_2)$ tiene la propiedad

$$\int P_{1/1}(y_1, t_1 | y_2, t_2) dy_2 = 1$$

pues

$$\int P_1(y_1, t_1) P_{1/1}(y_1, t_1 | y_2, t_2) dy_2 = \int P_2(y_1, t_1; y_2, t_2) dy_2$$

$$P_1(y_1, t_1) \int P_{1/1}(y_1, t_1 | y_2, t_2) dy_2 = P_1(y_1, t_1)$$

Si $P_1(y_1, t_1) \neq 0$ ya esta.

Densidad de probabilidad conjunta

$P_{k/l}(y_1, t_1; y_1, t_1; \ldots; y_k, t_k | y_{k+1}, t_{k+1}; y_{k+2}, t_{k+2}; \ldots; y_{k+l}, t_{k+l})$

Estas expresiones son relevantes cuando la variable estocastica tiene "memoria"

En particular

$$P_{k/1}(y_1, t_1; y_1, t_1; \ldots; y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n)$$

Esto nos lleva a una clasificacion en terminos de la memoria del sistema

Proceso de Markov $\Rightarrow$

$$P_{k/1}(y_1, t_1; y_1, t_1; \ldots; y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n) \longrightarrow P_{1/1}(y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n)$$

Entonces el estado del sistema a tiempo t solo depende del estado anterior.

Llamaremos a $P_{1/1}(y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n)$ "la probabilidad de transicion"

El proceso de Markov queda definido por

i) $P_1(y_1, t_1)$

ii) $P_{1/1}(y_1, t_1 | y_2, t_2)$

De este modo

$$P_3(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) = P_2(y_1, t_1; y_2, t_2) P_{2/1}(y_1, t_1; y_2, t_2 | y_3, t_3)$$
$$= P_1(y_1, t_1)\, P_{1/1}(y_1, t_1 | y_2, t_2) P_{1/1}(y_2, t_2 | y_3, t_3)$$

Si ahora integramos la ecuacion anterior sobre y_2

$$\int P_3(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) dy_2 = P_2(y_1, t_1; y_3, t_3) =$$

por definicion de $P_{1/1}$

$$= P_1(y_1,t_1)\ P_{1/1}(y_1,t_1|y_3,t_3)$$

pero tambien

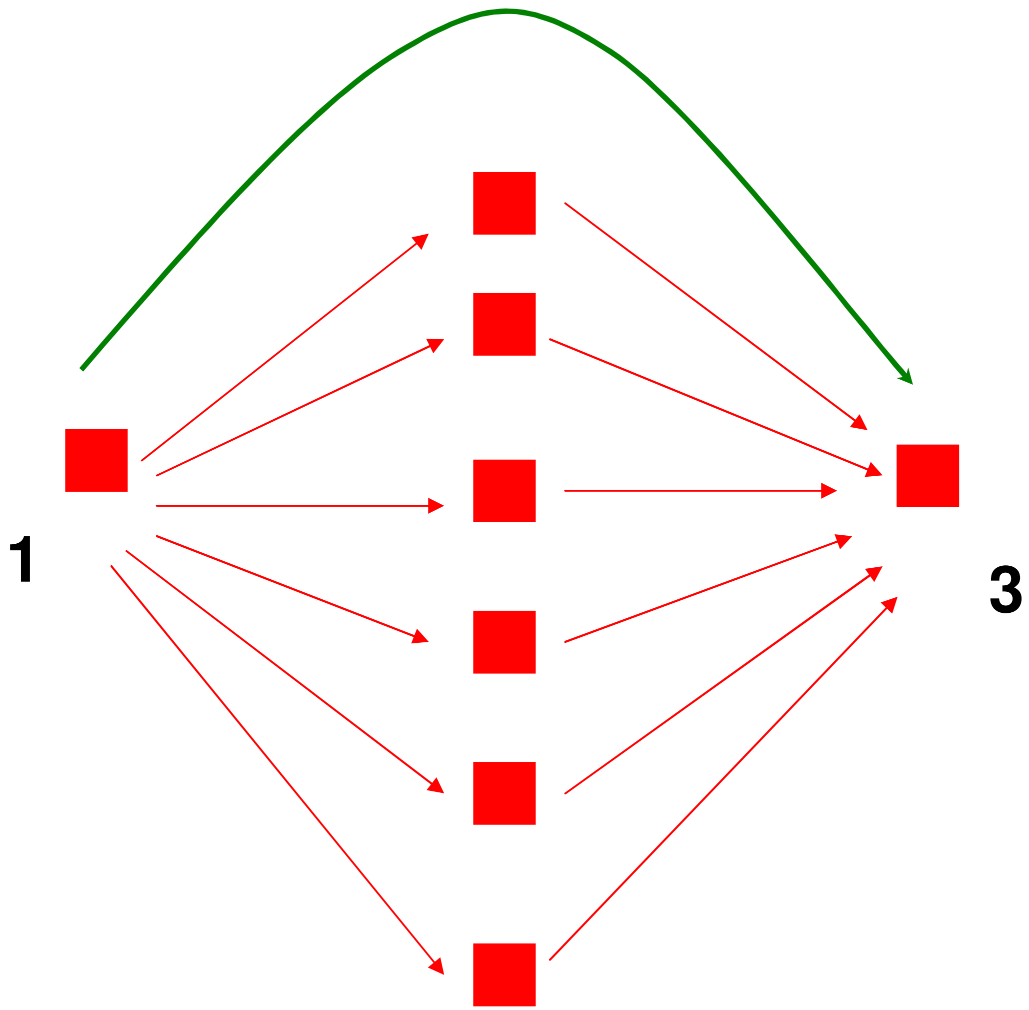
$$= \int P_1(y_1,t_1)\ P_{1/1}(y_1,t_1|y_2,t_2)P_{1/1}(y_2,t_2|y_3,t_3)dy_2 =$$

$$= P_1(y_1,t_1) \int P_{1/1}(y_1,t_1|y_2,t_2)P_{1/1}(y_2,t_2|y_3,t_3)dy_2$$

de donde con $P_1(y_1,t_1) \neq 0$

$$P_{1/1}(y_1,t_1|y_3,t_3) = \int P_{1/1}(y_1,t_1|y_2,t_2)P_{1/1}(y_2,t_2|y_3,t_3)dy_2$$

Ecuacion de Chapman-Kolmogorov


1
3