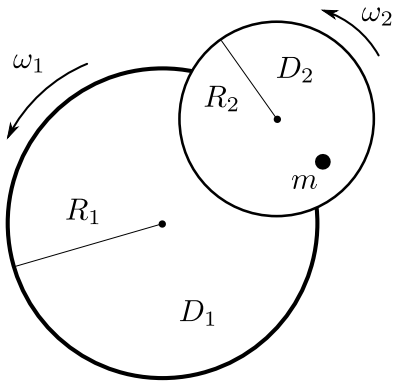
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2011

Algunos problemas resueltos de la Guía 2

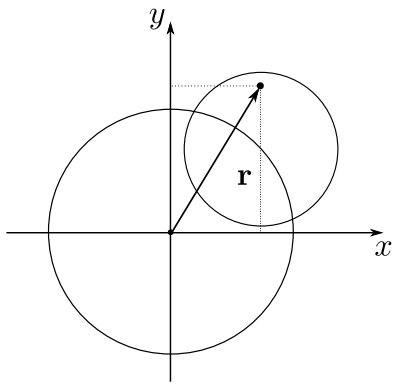
Problema 3 1
Problema 4 9
Problema 5 17

Problema 3

D_1 y D_2 son dos plataformas rotantes, como se muestra en la figura. D_1 se mueve respecto al sistema de laboratorio con velocidad angular ω_1. D_2 se mueve respecto a D_1 con velocidad angular ω_2. Una partícula de masa m se mueve libremente sobre D_2. Escriba el lagrangiano del sistema en términos de las coordenadas polares ρ y ϕ, de un sistema fijo a D_2. Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula e interprete.



■ **Solución**. Las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula son aquellas que la mantienen sobre la segunda plataforma. Estas fuerzas son de dos tipos. Una fuerza normal que confina a la partícula sobre el plano de las plataformas, y otra fuerza que actúa sólo cuando la partícula está por atravesar los límites de D_2. Mientras la partícula no llegue a los límites de la segunda plataforma, el problema a resolver es el de una partícula libre sobre un plano, y, por lo tanto, habrá dos grados de libertad.



Si tomamos un sistema de referencia inercial, con ejes cartesianos x e y y cuyo origen coincide con el centro de la primera plataforma, la posición de la partícula está determinada por sus dos coordenadas

cartesianas, $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$, y, puesto que sobre ella no actúan fuerzas, la ecuación de movimiento es $m\ddot{\mathbf{r}} = 0$. Es decir, la partícula se mueve según una recta en el plano xy. Esto resuelve el problema desde el punto de vista del sistema inercial fijo en el centro de la primera plataforma.

Pero lo que se pide es encontrar las ecuaciones de movimiento en el sistema de referencia fijo a la segunda plataforma. Hay varios caminos para hacer esto. El más directo sería escribir $\mathbf{r}$ en términos de las coordenadas del sistema fijo a D_2. Si se usan las coordenadas polares ρ y ϕ ligadas a D_2, deberíamos escribir primero $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, \phi, t)$, transformando de unas coordenadas a las otras

$$x \equiv x(\rho, \phi, t), \qquad y \equiv y(\rho, \phi, t),$$

y luego ver qué significa la ecuación $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ cuando $\mathbf{r}$ depende del tiempo implícitamente a través de ρ y de ϕ y explícitamente a través de la transformación de unas coordenadas a otras; es decir, la ecuación de movimiento sería

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left[\dot{\rho}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} + \dot{\phi}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right] = 0.$$

Por ahora no nos molestaremos en calcular las segundas derivadas. Más adelante retomaremos este camino.

Lo que queremos hacer es obtener las ecuaciones de movimiento en el sistema de referencia fijo a D_2 a partir de las ecuaciones de Lagrange. Para eso habrá que usar como coordenadas generalizadas las asociadas al sistema de referencia fijo a la segunda plataforma.

En general las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

donde la fuerza generalizada Q_i está dada como una suma sobre todas las partículas,

$$Q_i = \sum_j \mathbf{F}_j^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i}.$$

Como no hay fuerzas aplicadas sobre la partícula, en este problema las ecuaciones de Lagrange se reducen a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

La forma final que adopten estas ecuaciones dependerá de la elección de las coordenadas generalizadas. Si se usa, como al principio, el sistema de referencia inercial, $q_1 = x$ y $q_2 = y$, y la energía cinética es

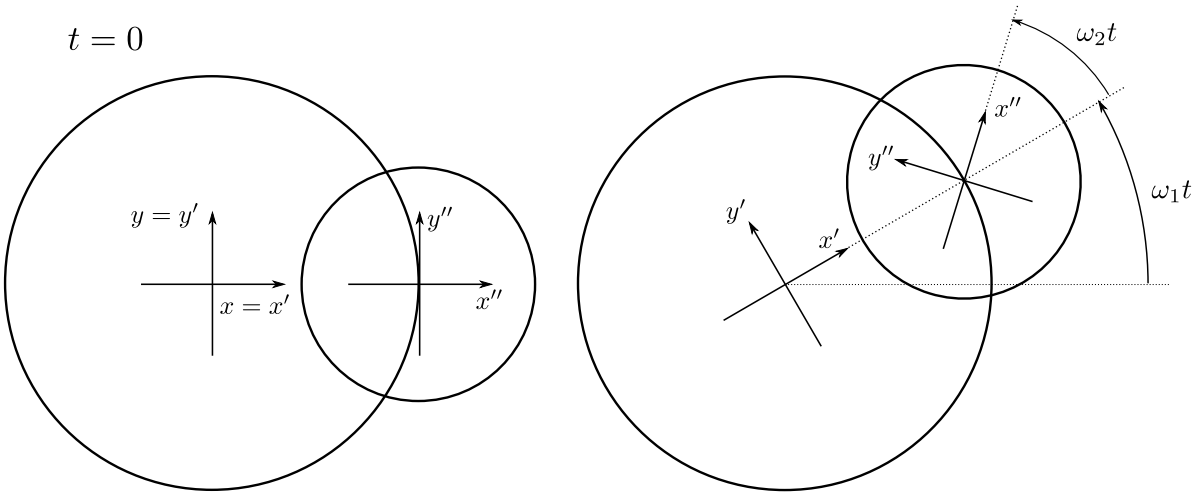
$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right).$$

Debido a que T no depende explícitamente de las coordenadas, las ecuaciones de Lagrange son muy simples,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \ddot{x} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \ddot{y} = 0.$$

Éste era el resultado esperado.

La siguiente figura muestra la relación entre los distintos sistemas de referencia, en el instante $t = 0$ y en un tiempo posterior.

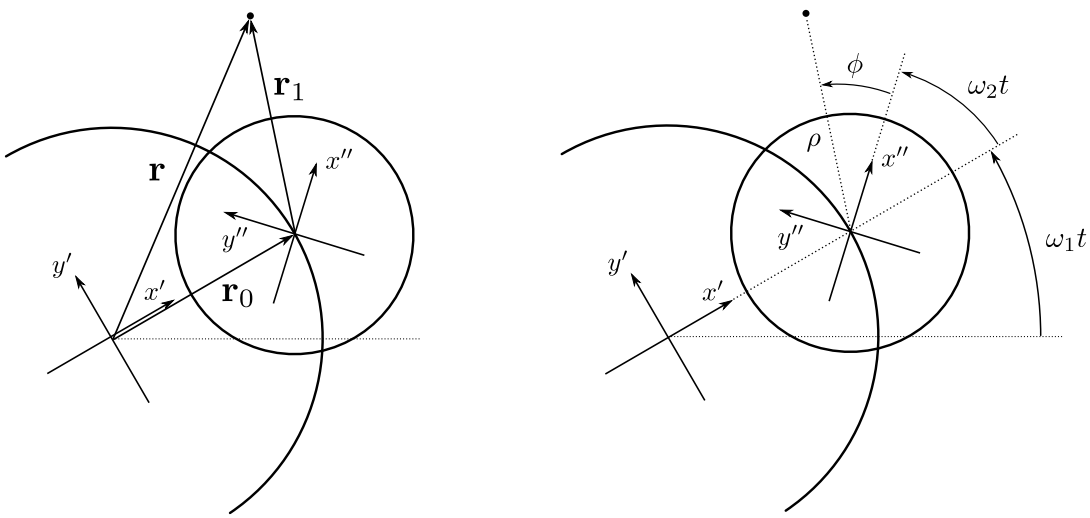


El sistema con ejes x e y está fijo en el centro de la primera plataforma. El sistema con ejes x' e y' rota con la primera plataforma, con velocidad angular ω_1. A su vez, el sistema de ejes x'' e y'' rota respecto del sistema primado con velocidad angular ω_2. En la figura se ha supuesto que en $t = 0$ los tres sistemas de ejes comparten la misma orientación.

Debido a que la posición y la orientación del sistema de ejes fijo a la segunda plataforma son funciones conocidas del tiempo, dar las coordenadas de la partícula usando este sistema de referencia es una descripción suficiente de la posición de la partícula. La figura de abajo muestra como puede definirse la posición de la partícula en términos de la posición del origen fijo a la segunda plataforma, $\mathbf{r}_0$, y del vector $\mathbf{r}_1$ que da la posición de la partícula respecto de este origen. Es decir,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1. \tag{1}$$

El vector $\mathbf{r}_1$ puede definirse usando las coordenadas polares ρ y ϕ asociadas a x'' e y''. En las figuras se ve que el ángulo que forma $\mathbf{r}_1$ con el eje x del primer sistema es $(\omega_1 + \omega_2)t + \phi$.



De manera que si a tiempo t se dan los valores de ρ y ϕ la posición de la partícula queda determinada por la Ec. (1) con

$$\mathbf{r}_0 = R_1 \cos(\omega_1 t)\, \hat{x} + R_1 \sin(\omega_1 t)\, \hat{y},$$
$$\mathbf{r}_1 = \rho \cos\left[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi\right]\, \hat{x} + \rho \sin\left[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi\right]\, \hat{y},$$

donde R_1 es el radio de D_1. Hay una forma más práctica de escribir esto, definiendo el vector unitario

$$\hat{\rho}(\alpha) = \cos\alpha\, \hat{x} + \sin\alpha\, \hat{y}.$$

Así resulta

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 = R_1\, \hat{\rho}(\omega_1 t) + \rho\, \hat{\rho}(\Omega t + \phi), \tag{2}$$

donde $\Omega = \omega_1 + \omega_2$. En las figuras anteriores es claro el significado de Ω: es la velocidad angular de la segunda plataforma respecto del sistema inercial xy. En un tiempo t, la segunda plataforma gira un ángulo $(\omega_1 + \omega_2)t = \Omega t$. Notar, además, que las funciones que relacionan los dos sistemas de coordenadas dependen explícitamente del tiempo. Podemos descomponer la ecuación anterior en sus componentes cartesianas según el sistema xy,

$$x = R_1 \cos(\omega_1 t) + \rho \cos(\Omega t + \phi),$$
$$y = R_1 \sin(\omega_1 t) + \rho \sin(\Omega t + \phi).$$

A partir de aquí es fácil calcular la velocidad de la partícula y su energía cinética en términos de las variables ρ , ϕ, de sus derivadas y del tiempo. Sin embargo, es quizá más práctico trabajar directamente con la ecuación vectorial (2).

Por el modo en que se definen los vectores $\hat{\rho}$, es evidente que el ángulo entre $\hat{\rho}(\alpha)$ y $\hat{\rho}(\beta)$ es $\alpha - \beta$, o, en otras palabras,

$$\hat{\rho}(\alpha) \cdot \hat{\rho}(\beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

Además la derivada temporal del vector $\hat{\rho}(\alpha)$, dada por

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(\alpha) = -\dot{\alpha} \sin\alpha\, \hat{x} + \dot{\alpha} \cos\alpha\, \hat{y},$$

está en la dirección del vector unitario $\hat{\phi}(\alpha)$,

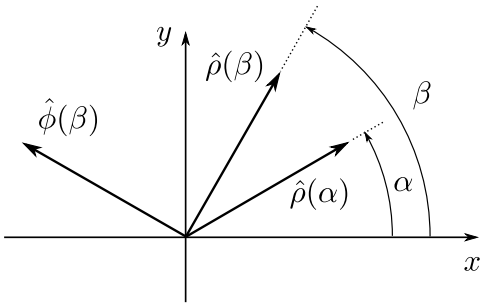
$$\hat{\phi}(\alpha) = -\sin\alpha\, \hat{x} + \cos\alpha\, \hat{y}.$$

Los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ son perpendiculares, y no son otros que los versores asociados a las coordenadas polares ligadas al sistema xy. El ángulo entre los vectores $\hat{\phi}(\alpha)$ y $\hat{\phi}(\beta)$ sigue siendo $\alpha - \beta$, porque ambos están rotados 90 grados respecto de sus vectores $\hat{\rho}$,

$$\hat{\phi}(\alpha) \cdot \hat{\phi}(\beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

Haciendo explícitamente el producto escalar o de manera gráfica puede verse también que

$$\hat{\rho}(\alpha) \cdot \hat{\phi}(\beta) = \sin(\alpha - \beta).$$



Tener en cuenta estas propiedades permitirá calcular más fácilmente la energía cinética. Empecemos por tomar la derivada temporal de $\mathbf{r}$, escrito como en la Ec. (2),

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \omega_1 R_1\, \hat{\phi}(\omega_1 t) + (\Omega + \dot{\phi})\rho\, \hat{\phi}(\Omega t + \phi) + \dot{\rho}\, \hat{\rho}(\Omega t + \phi). \tag{3}$$

Para calcular el módulo al cuadrado conviene seguir operando vectorialmente, usando la siguiente igualdad

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Así se obtiene

$$v^2 = (\omega_1 R_1)^2 + (\Omega + \dot{\phi})^2 \rho^2 + \dot{\rho}^2 + 2\omega_1 R_1\, \hat{\phi}(\omega_1 t) \cdot \Big[(\Omega + \dot{\phi})\rho\, \hat{\phi}(\Omega t + \phi) + \dot{\rho}\, \hat{\rho}(\Omega t + \phi)\Big]$$

$$+2(\Omega + \dot{\phi})\rho\dot{\rho}\; \hat{\phi}(\Omega t + \phi) \cdot \hat{\rho}(\Omega t + \phi).$$

El último producto escalar es cero, puesto que, para iguales valores de su argumento, $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ son ortogonales. El resto de los productos escalares puede hacerse con la ayuda de los resultados deducidos más arriba. El resultado final, teniendo en cuenta que $\Omega = \omega_1 + \omega_2$, es

$$v^2 = (\omega_1 R_1)^2 + (\Omega + \dot{\phi})^2 \rho^2 + \dot{\rho}^2 + 2\omega_1 R_1 \Big[(\Omega + \dot{\phi})\rho\, \cos(\omega_2 t + \phi) + \dot{\rho} \sin(\omega_2 t + \phi)\Big].$$

Las ecuaciones de Lagrange asociadas a ρ y ϕ son

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial T}{\partial \rho} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0,$$

donde

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \Big\{ (\omega_1 R_1)^2 + (\Omega + \dot{\phi})^2 \rho^2 + \dot{\rho}^2 + 2\omega_1 R_1 \Big[(\Omega + \dot{\phi})\rho\, \cos(\omega_2 t + \phi) + \dot{\rho} \sin(\omega_2 t + \phi)\Big] \Big\}.$$

Antes de ponerse a hacer las derivadas, conviene ver si hay términos que puedan omitirse en T sin modificar las ecuaciones de Lagrange. El más evidente de esos términos, en este caso, es la constante $m(\omega_1 R_1)^2/2$. Menos evidente, pero de mayor importancia práctica, es notar que dentro del último corchete puede identificarse la derivada total respecto del tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo. Para ver esto escribamos

$$(\Omega+\dot{\phi})\rho\,\cos(\omega_2 t+\phi)+\dot{\rho}\sin(\omega_2 t+\phi)=\omega_1\rho\,\cos(\omega_2 t+\phi)+(\omega_2+\dot{\phi})\rho\,\cos(\omega_2 t+\phi)+\dot{\rho}\sin(\omega_2 t+\phi).$$

Los dos últimos términos forman la siguiente derivada

$$(\omega_2+\dot{\phi})\rho\,\cos(\omega_2 t+\phi)+\dot{\rho}\sin(\omega_2 t+\phi)=\frac{d}{dt}\Big[\rho\sin(\omega_2 t+\phi)\Big].$$

Es posible entonces omitir estos dos términos en la expresión de T sin afectar las ecuaciones de movimiento. En definitiva, podemos reemplazar T por

$$T'=\frac{1}{2}m\Big\{(\Omega+\dot{\phi})^2\rho^2+\dot{\rho}^2+2\omega_1^2 R_1\rho\,\cos(\omega_2 t+\phi)\Big\}.$$

Si no nos hubiéramos dado cuenta de que podíamos descartar términos, tendríamos que haber calculado muchas más derivadas, pero al final del cálculo varias expresiones se hubieran cancelado entre sí. Es preferible simplificar antes de derivar.

Abajo figuran las ecuaciones de Lagrange; ustedes completen los pasos intermedios:

$$\ddot{\rho}-(\Omega+\dot{\phi})^2\rho-\omega_1^2 R_1\cos(\omega_2 t+\phi)=0,$$

$$\rho^2\ddot{\phi}+2\rho\dot{\rho}(\Omega+\dot{\phi})+\omega_1^2 R_1\rho\sin(\omega_2 t+\phi)=0. \tag{4}$$

Como, pese a todo, la partícula está libre y se mueve de acuerdo a la ecuación $\ddot{\mathbf{r}}=0$, el par de ecuaciones de Lagrange (4) es una forma complicada de escribir un resultado muy simple. Una forma de verificar si las Ecs. (4) son correctas es calcular explícitamente $\ddot{\mathbf{r}}$ a partir de la ecuación (2),

$$\mathbf{r}=R_1\,\hat{\rho}(\omega_1 t)+\rho\,\hat{\rho}(\Omega t+\phi).$$

La velocidad $\dot{\mathbf{r}}$ quedó escrita en la Ec. (3),

$$\dot{\mathbf{r}}=\omega_1 R_1\,\hat{\phi}(\omega_1 t)+(\Omega+\dot{\phi})\rho\,\hat{\phi}(\Omega t+\phi)+\dot{\rho}\,\hat{\rho}(\Omega t+\phi),$$

así que sólo resta derivar una vez más. Al derivar los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ hay que usar que

$$\frac{d}{d\alpha}\hat{\rho}(\alpha)=\hat{\phi}(\alpha),\qquad \frac{d}{d\alpha}\hat{\phi}(\alpha)=-\hat{\rho}(\alpha).$$

En definitiva,

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\omega_1^2 R_1\,\hat{\rho}(\omega_1 t)+\Big[\ddot{\phi}\rho+(\Omega+\dot{\phi})\dot{\rho}\Big]\,\hat{\phi}(\Omega t+\phi)-(\Omega+\dot{\phi})^2\rho\,\hat{\rho}(\Omega t+\phi)$$

$$+\ddot{\rho}\,\hat{\rho}(\Omega t+\phi)+(\Omega+\dot{\phi})\dot{\rho}\,\hat{\phi}(\Omega t+\phi).$$

Debido a que es una ecuación vectorial (en el plano), pueden sacarse de aquí dos ecuaciones independientes, proyectando en dos direcciones no paralelas. La elección natural es proyectar la ecuación $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ según $\hat{\rho}(\Omega t + \phi)$ y según $\hat{\phi}(\Omega t + \phi)$, que son dos direcciones perpendiculares entre sí. Con esto resulta

$$\hat{\rho}(\Omega t + \varphi) \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho} - (\Omega + \dot{\phi})^2 \rho - \omega_1^2 R_1 \cos(\omega_2 t + \phi) = 0,$$

$$\hat{\phi}(\Omega t + \varphi) \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}(\Omega + \dot{\phi}) + \omega_1^2 R_1 \sin(\omega_2 t + \phi) = 0. \tag{5}$$

Este par de ecuaciones coincide con el que habíamos obtenido antes.

No es difícil interpretar cada término en las ecuaciones anteriores. Si R_1 fuera cero, la segunda plataforma estaría fija en el origen del sistema inercial xy, pero rotando con una velocidad angular Ω en la dirección z. En estas condiciones, las ecuaciones de movimiento (5) se reducen a lo siguiente:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 = 2\Omega\,\rho\dot{\phi} + \rho\Omega^2,$$

$$\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} = -2\Omega\dot{\rho}. \tag{6}$$

En los miembros de la izquierda figuran las componentes de la aceleración en coordenadas cilíndricas, respecto del sistema de ejes de la segunda plataforma. Es la expresión habitual de la aceleración en coordenadas polares. Para distinguir esta aceleración de la calculada respecto de los ejes fijos, la llamaremos con el símbolo $[\ddot{\mathbf{r}}_1]_r$,

$$[\ddot{\mathbf{r}}_1]_r = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\,\hat{\rho}(\Omega t + \phi) + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\,\hat{\phi}(\Omega t + \phi).$$

Lo que haremos ahora será mostrar que a la derecha de la Ec. (6) figuran las fuerzas inerciales correctas.

Recordemos que para un sistema que rota con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, las fuerzas inerciales son la fuerza centrífuga,

$$\mathbf{F}_{\text{Cent}} = -m\,\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_1) = -m(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r}_1)\mathbf{\Omega} + m\Omega^2\,\mathbf{r}_1, \tag{7}$$

donde $\mathbf{r}_1$ es la posición de la partícula respecto del origen del sistema rotante, y la fuerza de Coriolis,

$$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m(\mathbf{\Omega} \times [\dot{\mathbf{r}}_1]_r), \tag{8}$$

donde $[\dot{\mathbf{r}}_1]_r$ es la velocidad de la partícula respecto del sistema rotante. Hay que tener mucho cuidado en hacer esa distinción. Una partícula en reposo en el sistema inercial tendrá $\dot{\mathbf{r}}_1 = 0$, y sin embargo $[\dot{\mathbf{r}}_1]_r = -\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_1$. Por definición, si los versores cartesianos $\hat{x}''(t)$, $\hat{y}''(t)$ y $\hat{z}(t)''$ son los asociados al sistema rotante, es

$$[\dot{\mathbf{r}}_1]_r = \dot{x}''(t)\,\hat{x}''(t) + \dot{y}''(t)\,\hat{y}'' + \dot{z}''\,\hat{z}''. \tag{9}$$

Aunque son funciones del tiempo, los versores $\hat{x}''$, $\hat{y}''$ y $\hat{z}''$ quedan sin derivar en esta expresión. En general puede demostrarse que

$$[\dot{\mathbf{r}}_1]_r = \dot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_1.$$

Es fácil comprobar, usando lo anterior, que la velocidad de la partícula respecto de la segunda plataforma está dada por la fórmula habitual para la velocidad en coordenadas polares,

$$[\dot{\mathbf{r}}_1]_r = \dot{\rho}\,\hat{\rho}(\Omega t + \phi) + \rho\dot{\phi}\,\hat{\phi}(\Omega t + \phi).$$

Esto puede hacerse aún más evidente si en lugar de usar los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ asociados al sistema inercial, usáramos los vectores $\hat{\rho}_r$ y $\hat{\phi}_r$ del sistema asociado a D_2, relacionados entre sí por

$$\hat{\rho}_r(\phi, t) = \hat{\rho}(\Omega t + \phi), \qquad \hat{\phi}_r(\phi, t) = \hat{\phi}(\Omega t + \phi).$$

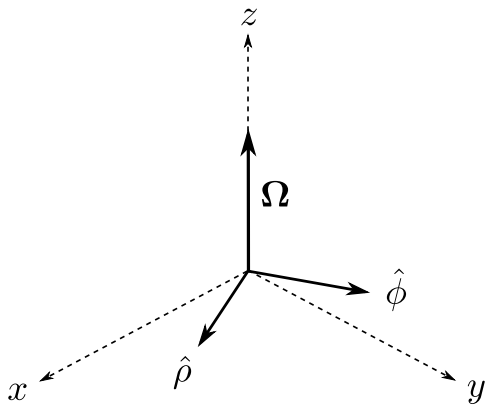
Entonces,

$$[\dot{\mathbf{r}}_1]_r = \dot{\rho}\,\hat{\rho}_r(\phi, t) + \rho\dot{\phi}\,\hat{\phi}_r(\phi, t).$$

Así se ve que esto no es más que una traducción de la ecuación (9) al sistema de coordenadas polares fijo a D_2.

Ahora bien, como $\mathbf{\Omega}$ está en z, al calcular el segundo miembro de la Ec. (8) resultará

$$\mathbf{\Omega} \times \hat{\rho} = \hat{\phi}, \qquad \mathbf{\Omega} \times \hat{\phi} = -\hat{\rho}.$$



Así, la fuerza de Coriolis (siempre en el caso especial en que $R_1 = 0$) sería

$$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\Omega\Big[\dot{\rho}\,\hat{\phi}(\Omega t + \phi) - \rho\dot{\phi}\,\hat{\rho}(\Omega t + \phi)\Big].$$

A su vez, como el movimiento es plano, con $\mathbf{\Omega}$ perpendicular a $\mathbf{r}_1$, la fuerza centrífuga (7) es simplemente

$$\mathbf{F}_{\text{Cent}} = m\Omega^2\,\mathbf{r}_1 = m\Omega^2\rho\,\hat{\rho}(\Omega t + \phi).$$

Reuniendo todo, y descomponiendo cada fuerza en las dos direcciones $\hat{\rho}(\Omega t + \phi)$ y $\hat{\phi}(\Omega t + \phi)$, es fácil ver que las fuerzas inerciales dan lugar a los segundos miembros en las Ecs. (6).

La diferencia entre el par de ecuaciones (6) y las ecuaciones completas, Ecs. (5), está en los términos proporcionales a R_1. Estos términos provienen de una tercera fuerza inercial, asociada a la aceleración $\ddot{\mathbf{r}}_0$ del origen del sistema de ejes fijo a la segunda plataforma,

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\omega_1^2 R_1\,\hat{\rho}(\omega_1 t).$$

Esta aceleración tiene módulo $\omega_1^2 R_1$, está en la dirección de x' y tiene asociada una fuerza inercial, en el sistema fijo a D_2, igual a

$$\mathbf{F_a} = m\omega_1^2 R_1\, \hat{\rho}(\omega_1 t).$$

Su proyección sobre $\hat{\rho}(\Omega t+\phi)$ es proporcional a $\cos(\omega_2 t+\phi)$, y su proyección sobre $\hat{\phi}(\Omega t+\phi)$ es proporcional a menos $\sin(\omega_2 t + \phi)$. Estos son los términos que faltan en (6) para llegar a (5).

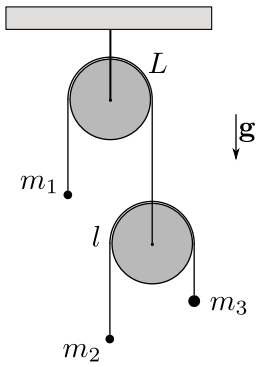
Con todo esto a la vista, las ecuaciones (5) se reescriben como

$$m[\ddot{\mathbf{r}}_1]_r = \mathbf{F}_{\text{Cor}} + \mathbf{F}_{\text{Cent}} + \mathbf{F_a},$$

y ahora cada término tiene un significado concreto.

Problema 4

Para el sistema de la figura, hallar la aceleración de cada masa, utilizando:



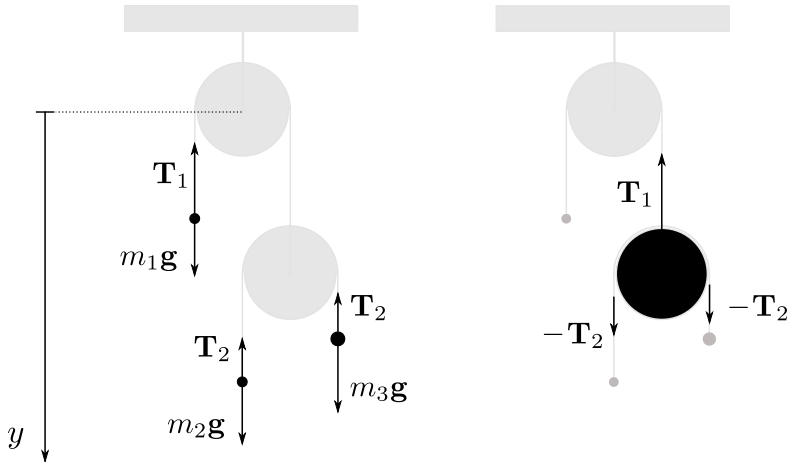
(a) Las ecuaciones de Newton y condiciones cinemáticas.

(b) El principio de los trabajos virtuales (PTV).

(c) Las ecuaciones de Lagrange.

(d)* Repita (a) y (b), pero ahora las poleas tienen masa M y radio R.

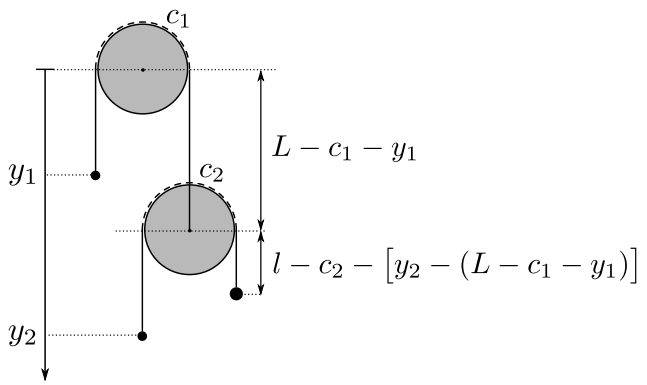
■ **Solución.** (a) La figura muestra las fuerzas que actúan sobre cada masa y sobre la segunda rueda.



El problema puede considerarse unidimensional. Midiendo la coordenada y a partir del centro de la primera rueda, las ecuaciones de Newton para cada masa son

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 &= m_1 g - T_1, \\ m_2\ddot{y}_2 &= m_2 g - T_2, \\ m_3\ddot{y}_3 &= m_3 g - T_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Las incógnitas son cinco: las tres aceleraciones $\ddot{y}_i$ y las dos tensiones T_1 y T_2. En verdad ni las posiciones ni las aceleraciones de las masas son independientes. Con la ayuda de la siguiente figura es fácil deducir la relación entre las tres posiciones.



La posición de la tercera masa es la suma de las longitudes $L - c_1 - y_1$ y $l - c_2 - \big[y_2 - (L - c_1 - y_1)\big]$,

$$y_3 = 2(L - c_1) + l - c_2 - (2y_1 + y_2),$$

donde c_1 y c_2 son iguales a la mitad del perímetro de cada rueda, y L y l son las longitudes de cada soga. En términos de las aceleraciones, la ecuación anterior implica $\ddot{y}_3 = -(2\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2)$. Esta relación reduce a cuatro el número de incógnitas. Como hay tres ecuaciones aún falta algo. La ecuación faltante es una relación entre las dos tensiones. Puesto que se ha asumido que la masa de las ruedas y sogas es despreciable, a partir de las fuerzas que actúan sobre la segunda rueda puede verse que $T_1 = 2T_2$.

En definitiva, podemos escribir un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 &= m_1 g - 2T_2, \\ m_2\ddot{y}_2 &= m_2 g - T_2, \\ -m_3(2\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) &= m_3 g - T_2. \end{aligned}$$

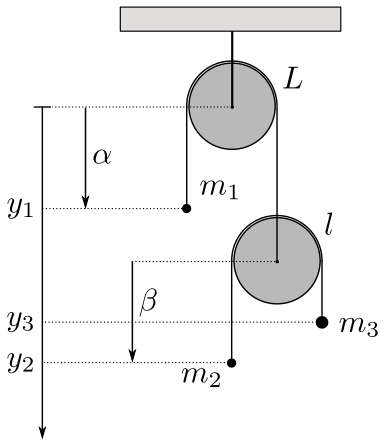
Al despejar se obtienen las ecuaciones de movimiento y la tensión T_2,

$$m_1\ddot{y}_1 = m_1 g - \frac{8gm_1m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)},$$

$$m_2\ddot{y}_2 = m_2 g - \frac{4gm_1m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)},$$

$$T_2 = \frac{4gm_1m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}. \tag{11}$$

En lugar de haber usado y_1 e y_2 como variables independientes, podríamos haber elegido como segunda variable no y_2 sino la posición de la segunda masa respecto del centro de la segunda rueda, como muestra la figura siguiente.



En la figura se ha llamado α a la posición de la primera masa (lo que antes llamamos y_1) y β a la posición de m_2 respecto del centro de la segunda rueda. Puede verse que las tres posiciones quedan escritas en términos de α y β como

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha, \\ y_2 &= L - c_1 - \alpha + \beta, \\ y_3 &= L + l - c_1 - c_2 - (\alpha + \beta). \end{aligned} \tag{12}$$

Derivando dos veces respecto del tiempo se obtiene

$$\ddot{y}_1 = \ddot{\alpha}, \qquad \ddot{y}_2 = -\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}, \qquad \ddot{y}_3 = -(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}).$$

Usando que $T_1 = 2T_2$, las ecuaciones de Newton (10) en términos de las nuevas variables son

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\alpha} &= m_1 g - 2T_2, \\ m_2(-\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) &= m_2 g - T_2, \\ -m_3(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) &= m_3 g - T_2. \end{aligned}$$

Si a la primera ecuación se le restan las otras dos, se elimina T_2 y resulta

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{\alpha} = g(m_1 - m_2 - m_3). \tag{13}$$

Del mismo modo, si a la segunda ecuación se le resta la tercera, se obtiene

$$(-m_2 + m_3)\ddot{\alpha} + (m_2 + m_3)\ddot{\beta} = g(m_2 - m_3). \tag{14}$$

Finalmente, despejando entre el par de ecuaciones (13) y (14),

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}\, g, \\ \ddot{\beta} &= \frac{2m_1(m_2 - m_3)}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}\, g. \end{aligned}$$

De manera alternativa, estas mismas ecuaciones se pueden obtener usando el resultado anterior, Ecs. (11). El valor de $\ddot{\alpha}$ se identifica directamente con el de $\ddot{y}_1$. Por otro lado, escribiendo

$$\ddot{\beta} = \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2,$$

y combinando las dos primeras ecuaciones (11) se obtiene $\ddot{\beta}$.

En lo hecho hasta aquí, para encontrar las ecuaciones de movimiento no fue fundamental usar desde el comienzo tantas variables como grados de libertad tiene el sistema. Esa reducción en el número de variables se hizo necesaria recién cuando vimos que había más incógnitas que ecuaciones. En los dos métodos que mostraremos a continuación, la identificación de un conjunto mínimo de variables será esencial.

■ (b) Ahora mostraremos cómo aplicar el principio de D'Alembert para hallar las ecuaciones de movimiento. Este principio queda enunciado por la siguiente ecuación

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \delta W. \tag{15}$$

La suma es sobre las partículas que componen el sistema, los desplazamientos $\delta \mathbf{r}_i$ son desplazamientos virtuales, compatibles con los vínculos en cada instante, y δW es el trabajo de las fuerzas aplicadas al realizar esos desplazamientos. Las cantidades $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ son los impulsos de cada partícula. El objetivo es escribir la ecuación anterior expresando todas las cantidades en términos de un mínimo de variables independientes.

Las variables α y β son un conjunto mínimo posible de variables para describir el sistema de las tres masas. Como todo ocurre sobre el eje y, omitiremos indicar el carácter vectorial de las diversas cantidades. A partir de las relaciones de transformación (12), los impulsos de las tres masas son

$$p_1 = m_1 \dot{\alpha}, \quad p_2 = m_2(-\dot{\alpha} + \dot{\beta}), \quad p_3 = -m_3(\dot{\alpha} + \dot{\beta}),$$

y sus derivadas temporales

$$\dot{p}_1 = m_1 \ddot{\alpha}, \quad \dot{p}_2 = m_2(-\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}), \quad \dot{p}_3 = -m_3(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}).$$

El trabajo de las fuerzas aplicadas es debido únicamente a la gravedad,

$$\delta W = g(m_1 \delta y_1 + m_2 \delta y_2 + m_3 \delta y_3).$$

Los desplazamientos pueden escribirse en términos de $\delta\alpha$ y $\delta\beta$,

$$\delta y_1 = \delta\alpha, \quad \delta y_2 = -\delta\alpha + \delta\beta, \quad \delta y_3 = -(\delta\alpha + \delta\beta).$$

Así

$$\delta W = g\big[(m_1 - m_2 - m_3)\delta\alpha + (m_2 - m_3)\delta\beta\big].$$

Ya tenemos todo lo necesario para escribir (15). Agrupando términos proporcionales a $\delta\alpha$ y $\delta\beta$, resulta

$$\Big[(m_1+m_2+m_3)\ddot{\alpha}+(-m_2+m_3)\ddot{\beta}\Big]\,\delta\alpha+\Big[(-m_2+m_3)\ddot{\alpha}+(m_2+m_3)\ddot{\beta}\Big]\,\delta\beta$$
$$=g\Big[(m_1-m_2-m_3)\delta\alpha+(m_2-m_3)\delta\beta\Big]. \qquad (16)$$

Puesto que los desplazamientos según α y β son independientes, igualando los coeficientes de $\delta\alpha$ y $\delta\beta$ a cada lado de la ecuación, resultan estas otras dos ecuaciones:

$$(m_1+m_2+m_3)\ddot{\alpha}+(-m_2+m_3)\ddot{\beta}=g(m_1-m_2-m_3),$$
$$(-m_2+m_3)\ddot{\alpha}+(m_2+m_3)\ddot{\beta}=g(m_2-m_3).$$

Estas son las mismas ecuaciones que escribimos antes, Ecs. (13) y (14). El siguiente método que veremos es el de las ecuaciones de Lagrange.

■ (c) Conocido el lagrangiano del sistema como función de las coordenadas y las velocidades generalizadas, las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0.$$

Para el problema en cuestión, las coordenadas son α y β, y el lagrangiano se calcula como la diferencia entre la energía cinética y la potencial,

$$L=\frac{1}{2}\left[m_1\dot{y}_1^2+m_2\dot{y}_2^2+m_3\dot{y}_3^2\right]+g(m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3),$$

donde se entiende que todas las posiciones y velocidades deben escribirse en términos de α y β y de sus derivadas. Explícitamente,

$$L=\frac{1}{2}\left[m_1\dot{\alpha}^2+m_2(\dot{\alpha}-\dot{\beta})^2+m_3(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2\right]+g\Big[(m_1-m_2-m_3)\alpha+(m_2-m_3)\beta\Big]$$
$$+g\left[2(L-c_1)+(l-c_2)\right]. \qquad (17)$$

El último término es una constante irrelevante. Ya podemos calcular cada término de las ecuaciones de Lagrange. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}=(m_1+m_2+m_3)\ddot{\alpha}+(-m_2+m_3)\ddot{\beta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha}=g(m_1-m_2-m_3).$$

Entonces, la primera ecuación es

$$(m_1+m_2+m_3)\ddot{\alpha}+(-m_2+m_3)\ddot{\beta}=g(m_1-m_2-m_3).$$

Del mismo modo se obtiene la segunda ecuación. Es inmediato comprobar que se reproducen los resultados obtenidos por los otros dos métodos.

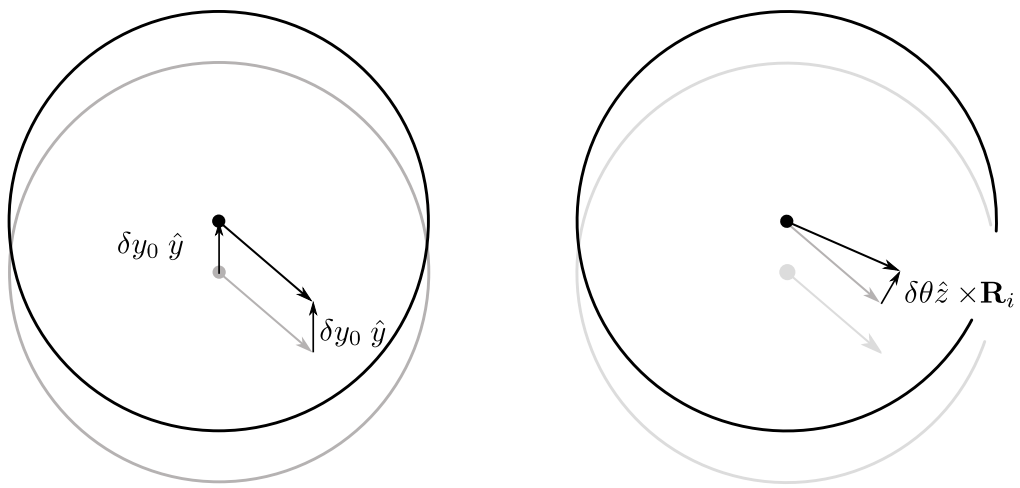
■ (d) En todo lo anterior se ha supuesto que las ruedas que forman las poleas no tienen masa. Ahora veremos cómo se modifican los resultados si se supone que las dos ruedas tienen masa M y radio R. La aplicación directa de las ecuaciones de Newton quedará como ejercicio, lo que haremos aquí será, primero, aplicar el principio de D'Alembert, luego escribiremos, de manera más directa, el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange.

Restringiéndonos al caso de ruedas en forma de disco plano, de masa M y radio R, debemos ver cómo calcular los términos $\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i$ y δW asociados a los desplazamientos de cada rueda.

Para eso, supongamos que el centro de la rueda, ubicado en la posición $\mathbf{r}_0 = y_0\,\hat{y}$, sólo puede moverse sobre el eje y, y supongamos que la rueda puede a su vez puede girar alrededor de su eje. Llamemos ω a su velocidad angular, que estará en la dirección z. Puede pensarse que la rueda está compuesta por un conjunto de partículas de masa m_i y cuyas posiciones son $\mathbf{r}_i$. La posición relativa de cada partícula al centro de la rueda es $\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$. Si el centro de la rueda se desplaza una cantidad δy_0 sobre el eje y, y a su vez si la rueda gira un ángulo $\delta\theta$ respecto de su eje, el desplazamiento de cada partícula de la rueda es la combinación de una traslación y una rotación:

$$\delta\mathbf{r}_i = \delta y_0\,\hat{y} + \delta\theta\,\hat{z} \times \mathbf{R}_i.$$

La figura de abajo muestra el efecto de cada uno de estos dos desplazamientos. El resultado final, a más bajo orden en δy_0 y $\delta\theta$, es independiente del orden en que se efectúen los desplazamientos.



Similarmente, la velocidad de cada punto de la rueda es

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{y}_0\,\hat{y} + \omega\,\hat{z} \times \mathbf{R}_i, \tag{18}$$

donde $\dot{y}_0$ es la velocidad del centro de masa y ω la velocidad angular de la rueda alrededor de su eje. La aceleración se calcula derivando la ecuación anterior,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{y}_0\,\hat{y} + \dot{\omega}\,\hat{z} \times \mathbf{R}_i + \omega\,\hat{z} \times \dot{\mathbf{R}}_i.$$

A su vez, $\dot{\mathbf{R}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{y}_0\,\hat{y}$ puede leerse de la expresión (18). En definitiva,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{y}_0\,\hat{y} + \dot{\omega}\,\hat{z}\times\mathbf{R}_i + \omega^2\,\hat{z}\times\big(\hat{z}\times\mathbf{R}_i\big).$$

Como la rueda está contenida en el plano xy, el último término se puede simplificar

$$\hat{z}\times\big(\hat{z}\times\mathbf{R}_i\big) = (\hat{z}\cdot\mathbf{R}_i)\,\hat{z} - \mathbf{R}_i = -\mathbf{R}_i,$$

con lo que resulta

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{y}_0\,\hat{y} + \dot{\omega}\,\hat{z}\times\mathbf{R}_i - \omega^2\,\mathbf{R}_i.$$

El significado de cada término en esta expresión es bastante evidente. Conocida la aceleración, para cada partícula de la rueda es $\dot{\mathbf{p}}_i = m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$.

Estos son todos los elementos necesarios para calcular la suma $\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i$. Deberían obtener

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = \sum_i m_i\left(\ddot{y}_0\,\hat{y} + \dot{\omega}\,\hat{z}\times\mathbf{R}_i - \omega^2\,\mathbf{R}_i\right)\cdot\left(\delta y_0\,\hat{y} + \delta\theta\,\hat{z}\times\mathbf{R}_i\right)$$

$$= \left[\ddot{y}_0\left(\sum_i m_i\right) + (\dot{\omega}\,\hat{x} - \omega^2\hat{y})\cdot\left(\sum_i m_i\mathbf{R}_i\right)\right]\delta y_0 + \left[\dot{\omega}\left(\sum_i m_i\,|\hat{z}\times\mathbf{R}_i|^2\right) + \ddot{y}_0\left(\sum_i m_i\mathbf{R}_i\right)\hat{x}\right]\delta\theta. \tag{19}$$

Es claro que $\sum_i m_i = M$. Por otro lado, la suma $\sum_i m_i\mathbf{R}_i$ es la posición del centro de masa de la rueda respecto del centro de masa de la rueda, y por lo tanto es el vector nulo. La suma $\sum_i m_i\,|\hat{z}\times\mathbf{R}_i|^2$ puede escribirse de esta manera:

$$\sum_i m_i\,|\hat{z}\times\mathbf{R}_i|^2 = \sum_i m_i\left[R_i^2 - (\mathbf{R}_i\cdot\hat{z})^2\right] = I.$$

Esto es lo que uno llamaría el momento de inercia de la rueda respecto del eje z. Más aún, como cada vector $\mathbf{R}_i$ está en el plano xy, simplemente queda

$$I = \sum_i m_i R_i^2.$$

En realidad la suma es una integral sobre el disco, con una densidad superficial de masa igual a $M/(\pi R^2)$:

$$I = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi\,\frac{M}{\pi R^2}\,\rho^2 = \frac{MR^2}{2},$$

que es un resultado conocido.

Al final, lo único que queda de la Ec. (19) es

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = M\ddot{y}_0\delta y_0 + I\dot{\omega}\delta\theta.$$

Ahora hay que calcular el término δW. La única fuerza aplicada sobre la rueda es su peso. La suma de los trabajos virtuales sobre todas las partículas es

$$\delta W = \sum_i m_i g\, \hat{y} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i g\, \hat{y} \cdot (\delta y_0\, \hat{y} + \delta\theta\, \hat{z} \times \mathbf{R}_i) = Mg\delta y_0.$$

Aquí se ha usado nuevamente que

$$\sum_i m_i\, \mathbf{R}_i = 0.$$

Volviendo al problema de las dos poleas, hay que notar que la primera polea está fija, de modo que $\delta y_0 = 0$. Además, debido a que no hay deslizamiento, su rotación está ligada al movimiento de la masa m_1,

$$\delta\theta_1 = \frac{\delta\alpha}{R}, \qquad \omega_1 = \frac{\dot{\alpha}}{R}.$$

(Recordar que $\alpha = y_1$.) La posición del centro de masa de la segunda rueda está en $y_0 = L - c_1 - \alpha$ (ver las figuras más arriba), de modo que $\delta y_0 = -\delta\alpha$ y $\ddot{y}_0 = -\ddot{\alpha}$. La rotación de la segunda rueda está ligada a la variación de β,

$$\delta\theta_2 = \frac{\delta\beta}{R}, \qquad \omega_2 = \frac{\dot{\beta}}{R}.$$

La expresión completa del principio de D'Alembert para el sistema de ruedas y masas se consigue sumando las contribuciones de las ruedas a lo que habíamos calculado anteriormente para las masas, Ec. (16). Deberían poder llegar a la siguiente expresión:

$$\left[(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{\alpha} + (-m_2 + m_3)\ddot{\beta} + \frac{I\ddot{\alpha}}{R^2} + M\ddot{\alpha}\right]\delta\alpha + \left[(-m_2 + m_3)\ddot{\alpha} + (m_2 + m_3)\ddot{\beta} + \frac{I\ddot{\beta}}{R^2}\right]\delta\beta$$
$$= g\Big[(m_1 - m_2 - m_3 - M)\delta\alpha + (m_2 - m_3)\delta\beta\Big].$$

De aquí se deducen las dos ecuaciones de movimiento,

$$\left(m_1 + m_2 + m_3 + M + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{\alpha} + (-m_2 + m_3)\ddot{\beta} = g(m_1 - m_2 - m_3 - M),$$

$$(-m_2 + m_3)\ddot{\alpha} + \left(m_2 + m_3 + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{\beta} = g(m_2 - m_3).$$

Un camino menos arduo para obtener las ecuaciones de movimiento es calcular el lagrangiano del sistema. Hay que tener en cuenta la energía cinética de las ruedas y su energía potencial. Al lagrangiano escrito en la Ec. (17), hay que sumar la siguiente contribución debida a las ruedas:

$$L' = \frac{1}{2}M\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2\right) + g(L - c_1 - \alpha)M.$$

El primer término es la energía cinética asociada a la traslación de la segunda rueda, el segundo término es la energía cinética de rotación de las dos ruedas, y el último término es menos la energía potencial de la segunda rueda. Las ecuaciones de movimiento se obtienen inmediatamente y coinciden con las que hallamos antes. Hay que notar cuánto más simple es escribir el lagrangiano que aplicar el principio de D'Alembert.

Problema 5

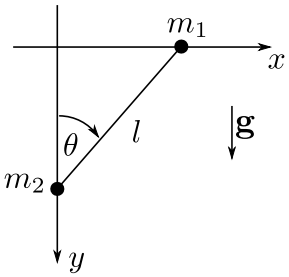
Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por un hilo inextensible de longitud l; m_1 se mueve sólo sobre el eje x y m_2 sólo sobre el y. Las condiciones iniciales son las que indica la figura.

(a) Halle la ecuación de movimiento para θ utilizando el PTV.

(b) Halle la ecuación de Lagrange para θ.

(c) Si $m_1 = m_2 \equiv m$, halle la tensión T en el hilo como función de θ.

(d) ¿Cuál es el período de movimiento en este caso? Suponga que θ sólo puede tomar valores pequeños.



■ (a) Si queremos resolver el problema usando el principio de D'Alembert o de trabajos virtuales, debemos calcular los dos miembros de la ecuación

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \delta W.$$

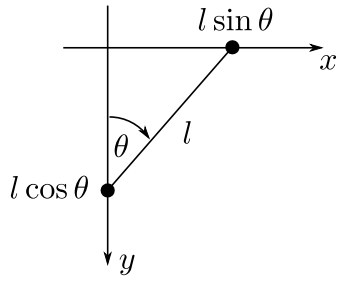
Las únicas fuerzas aplicadas son los pesos de las dos partículas, pero como la primera partícula se mueve sobre el eje horizontal, sólo el peso de la segunda partícula realiza trabajo. Inmediatamente podemos escribir

$$\sum_{i=1}^{2} \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = m_1 \ddot{x}_1 \, \delta x_1 + m_2 \ddot{y}_2 \, \delta y_2,$$
$$\delta W = m_2 g \delta y_2.$$

Luego,

$$m_1 \ddot{x}_1 \, \delta x_1 + m_2 \ddot{y}_2 \, \delta y_2 = m_2 g \delta y_2. \tag{20}$$

Para que esta ecuación sea útil, todo debe quedar escrito en términos de un conjunto mínimo de desplazamientos independientes. Una variable adecuada es el ángulo θ.



Conocido θ, las posiciones de las dos masas quedan determinadas completamente,

$$x_1 = l\sin\theta, \qquad y_2 = l\cos\theta.$$

Derivando dos veces respecto del tiempo se obtiene

$$\ddot{x}_1 = l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta), \qquad \ddot{y}_2 = -l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta).$$

Por otro lado,

$$\delta x_1 = l\cos\theta\,\delta\theta, \qquad \delta y_2 = -l\sin\theta\,\delta\theta.$$

Además,

$$\delta W = m_2 g\delta y_2 = -m_2 gl\sin\theta\,\delta\theta.$$

La Ec. (20) se lee entonces como

$$\left[l^2(m_1\cos^2\theta + m_2\sin^2\theta)\ddot{\theta} + l^2\sin\theta\cos\theta(m_2 - m_1)\dot{\theta}^2\right]\delta\theta = -m_2 gl\sin\theta\,\delta\theta.$$

Finalmente,

$$(m_1\cos^2\theta + m_2\sin^2\theta)\ddot{\theta} + \sin\theta\cos\theta(m_2 - m_1)\dot{\theta}^2 = -\frac{m_2 g}{l}\sin\theta. \tag{21}$$

■ (b) Veremos ahora cómo obtener la ecuación de movimiento para θ a partir del lagrangiano del sistema. En términos de la única variable independiente y de su derivada, el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}l^2\left(m_1\cos^2\theta + m_2\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + m_2 gl\cos\theta.$$

La ecuación de movimiento resulta

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial\theta}.$$

El primer término es

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = l^2\left(m_1\cos\theta^2 + m_2\sin\theta^2\right)\ddot{\theta} + 2l^2\sin\theta\cos\theta\left(m_2 - m_1\right)\dot{\theta}^2,$$

en tanto que

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = l^2\sin\theta\cos\theta\left(m_2 - m_1\right)\dot{\theta}^2 - m_2 gl\sin\theta.$$

Igualando se obtiene nuevamente la Ec. (21).

Hay que notar que como el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo y es, además, una función cuadrática de $\dot{\theta}$, la suma de las energías cinética y potencial es una cantidad conservada,

$$E = \frac{1}{2}l^2\left(m_1\cos^2\theta + m_2\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2 - m_2 gl\cos\theta.$$

■ (c) El problema principal ahora es calcular la tensión en el hilo cuando $m_1 = m_2 = m$. Si las masas son iguales, la energía es

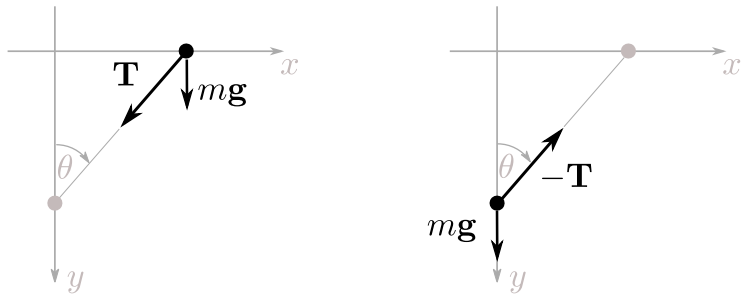
$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta, \tag{22}$$

y la ecuación de movimiento se reduce a lo siguiente:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta, \tag{23}$$

que es la ecuación de movimiento de un péndulo plano, con un período de oscilación, para pequeñas amplitudes, dado por $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$.

La tensión en el hilo puede encontrarse a partir de la aceleración de cualquiera de las dos masas, planteando la segunda ley de Newton.



Por ejemplo, la aceleración de la primera partícula multiplicada por su masa debe ser igual a la proyección sobre el eje x de la tensón $\mathbf{T}$, es decir,

$$\ddot{x}_1 = -\frac{T}{m}\sin\theta.$$

Sabiendo que $\ddot{x}_1 = l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)$, se encuentra

$$\frac{T}{m}\sin\theta = -l\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right).$$

A partir de ecuación de movimiento (23) se elimina $\ddot{\theta}$, resultando

$$\frac{T}{m} = g\cos\theta + l\dot{\theta}^2, \tag{24}$$

y a partir de la ecuación de la energía (22) puede escribirse $\dot{\theta}^2$ en función de θ. Haciendo este reemplazo, la tensión, en términos de θ, es

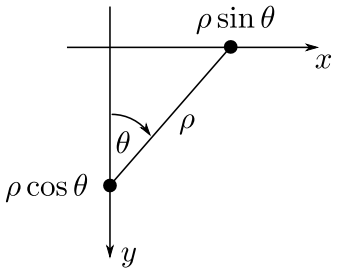
$$\frac{T}{m} = 3g\cos\theta + \frac{2E}{ml}. \tag{25}$$

Las condiciones iniciales para θ y $\dot{\theta}$ fijan el valor de la energía. Queda como ejercicio llegar al mismo resultado (25) a partir de la ecuación de Newton de la segunda masa.

A modo de verificación pueden plantearse dos condiciones iniciales donde es fácil prever el valor de la tensión. Supóngase primero que las dos masas son dejadas en reposo, con la primera masa en $x_1 = 0$ y la segunda en $y_2 = l$. Es evidente que la magnitud de la tensión debe ser igual al peso de la segunda masa. En efecto: con $\theta = 0$ y $E = -mgl$ se obtiene $T = mg$. Otro caso fácil de analizar es cuando las masas son dejadas en reposo con la primera masa en $x_1 = l$ y la segunda en $y_2 = 0$, lo que implica $E = 0$. La tensión debería ser cero, y en verdad así ocurre, puesto que para $\theta = \pi/2$ y $E = 0$ la Ec. (25) da $T = 0$.

Otra forma de encontrar la tensión de la cuerda es considerar la fuerza de tensión como una fuerza aplicada más, dejando sin efecto, al mismo tiempo, la condición de vínculo que fija la longitud de la cuerda. Lo que distingue una fuerza aplicada de una fuerza de vínculo es que la primera es conocida y la segunda es parte de la solución del problema. De manera que tratar a una fuerza de vínculo como si fuera una fuerza aplicada puede llevar a un camino sin salida. Veremos sin embargo que no es siempre el caso. La idea entonces es incluir a la tensión como una fuerza aplicada más, eliminar el vínculo asociado a la longitud constante de la cuerda, encontrar las ecuaciones de movimiento, que dependerán de T, y sólo al final preguntarnos cuánto debería valer T para que la distancia entre las partículas sea constante.

Entonces, empecemos por suponer que si bien las dos masas se mueven cada una sobre un eje, la distancia entre ellas puede tener cualquier valor, digamos ρ.



Así, las posiciones de las masas serán

$$\mathbf{r}_1 = \rho \sin\theta\, \hat{x}, \qquad \mathbf{r}_2 = \rho \cos\theta\, \hat{y}.$$

Supondremos que las fuerzas aplicadas sobre cada masa son sus pesos y la tensión de la cuerda. Como la tensión no tiene asociado un potencial, en lugar de escribir el lagrangiano retrocederemos un paso, escribiendo las ecuaciones de Lagrange en la forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j,$$

donde

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Escribimos la energía cinética usando la letra K, reservando T para la tensión. La energía cinética se calcula fácilmente y es

$$K = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \right).$$

Estamos suponiendo, como antes, que $m_1 = m_2 = m$. Como las dos variables independientes son ahora θ y ρ, tendremos el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial K}{\partial \rho} = Q_\rho,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial K}{\partial \theta} = Q_\theta. \tag{26}$$

La fuerza neta aplicada sobre cada masa es

$$\mathbf{F}_1 = (mg + T\cos\theta)\,\hat{y} - T\sin\theta\,\hat{x},$$

$$\mathbf{F}_2 = (mg - T\cos\theta)\,\hat{y} + T\sin\theta\,\hat{x}.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \rho} = \sin\theta\,\hat{x}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta} = \rho\cos\theta\,\hat{x},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \rho} = \cos\theta\,\hat{y}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta\,\hat{y}.$$

Con esto resulta

$$Q_\rho = -T\sin^2\theta - T\cos^2\theta + mg\cos\theta = -T + mg\cos\theta,$$

$$Q_\theta = -T\sin\theta\cos\theta - mg\rho\sin\theta + T\cos\sin\theta = -mg\rho\sin\theta.$$

Las ecuaciones de Lagrange son, finalmente,

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -T + mg\cos\theta,$$

$$m(\rho^2\ddot{\theta} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}) = -mg\rho\sin\theta.$$

El paso crucial ahora es imponer la condición $\rho = l$, constante, es decir, $\ddot{\rho} = \dot{\rho} = 0$. Lo importante es notar que al hacer eso se obtiene el valor de la tensión en términos de θ y de $\dot{\theta}$,

$$T = ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta.$$

Esto coincide con el resultado anterior, Ec. (24). La condición $\rho = l$ impuesta en la ecuación para $\ddot{\theta}$ implica la misma ecuación de movimiento encontrada anteriormente,

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

Como el peso es una fuerza que proviene del gradiente de un potencial, el peso de las dos masas podría haber sido incluido en el primer miembro de las ecuaciones de Lagrange, Ecs. (26), definiendo como antes un lagrangiano igual a $K - V$, e incluyendo en la definición de las fuerzas generalizadas Q_i sólo la tensión,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = Q_\rho,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta,$$

$$Q_\rho = -T, \qquad Q_\theta = 0, \tag{27}$$

con

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) + mgl\cos\theta.$$

Esta forma de escribir las ecuaciones de Lagrange es en esencia equivalente a aplicar el método de los multiplicadores *del mismo*. Ese es el método que (sin demostrarlo) presentaremos a continuación.

Para explicar los fundamentos del método de los multiplicadores de Lagrange, supondremos que se quiere averiguar la fuerza asociada a un dado vínculo. La condición de vínculo ha de poder escribirse como

$$\sum_i a_i dq_i + bdt = 0, \tag{28}$$

donde los coeficientes a_i y b pueden ser funciones de las coordenadas y del tiempo.

Al aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange, la condición geométrica impuesta por el vínculo se elimina al comienzo del planteo. Dicho en otras palabras, la variable cuyo movimiento el vínculo restringe se considera una variable dinámica más. Las ecuaciones de Lagrange se sustituyen por estas otras

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda a_i,$$

donde λ es el llamado multiplicador de Lagrange y es una incógnita más del problema, que debe elegirse de modo que se satisfaga la Ec. (28) o, de manera equivalente,

$$\sum_i a_i \dot{q}_i + b = 0. \tag{29}$$

La equivalencia formal con el método que aplicamos anteriormente es clara.

Volviendo al problema de las dos masas, la ecuación de vínculo $\rho = l$ puede llevarse a las formas (28) o (29),

$$d\rho = 0, \qquad \dot{\rho} = 0. \tag{30}$$

Esto equivale a tener $a_\rho = 1$ y $a_\theta = b = 0$. El lagrangiano se construye con ρ y θ como coordenadas generalizadas,

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) + mgl\cos\theta.$$

Las ecuaciones de Lagrange son entonces

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = \lambda,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \tag{31}$$

Notar la equivalencia completa con las Ecs. (27). Igual que antes, se obtiene

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) - mg\cos\theta = \lambda,$$

$$m(\rho^2\ddot{\theta} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}) + mg\rho\sin\theta = 0.$$

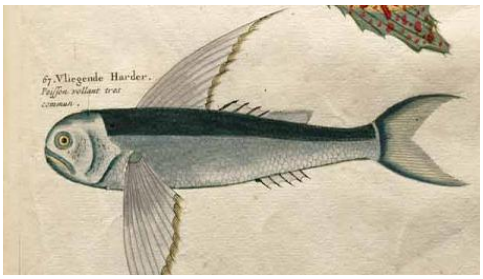
Recién ahora se impone la condición (30) sobre ρ, con lo que resulta

$$-ml\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \lambda,$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0.$$

Sabiendo que lo que está a la derecha de cada ecuación de Lagrange (31) debe ser la fuerza generalizada asociada a la fuerza de vínculo que se quiere determinar, puede hacerse la identificación

$$\lambda = Q_\rho.$$

Pero, por otro lado, ya vimos que $Q_\rho = -T$, de manera que $\lambda = -T$. Así queda resuelto el problema de hallar la tensión en el hilo.

■ (d) El período de movimiento para pequeñas oscilaciones quedó escrito al comienzo del ítem (c). El resultado coincidía con el período de un péndulo plano de longitud l, $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$.