Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2011 – Primer parcial (6/10/2011)

P1. (2.5 puntos) Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por un hilo de longitud L, como indica la figura. La masa m_1 se mueve sobre la superficie de un cono de ángulo α. La masa m_2 se mueve sólo verticalmente. En $t = 0$, m_1 se encuentra a una distancia $r_0 < L$ del vértice y se le aplica una velocidad $\mathbf{v}_0$ perpendicular al hilo.
a) Escriba las ecuaciones de Lagrange y halle sus integrales primeras en términos de las condiciones iniciales.
b) ¿Para qué valor de v_0 es posible que la masa m_1 describa una órbita circular? ¿Qué condición deben cumplir las masas para que esto sea posible?
c) Halle la tensión del hilo correspondiente al caso b).

Solución

a) Usamos coordenadas esféricas con eje z apuntado hacia abajo. La posición de la masa 2 está dada por z_2 y la de la masa 1 por sus coordenadas esféricas $\{r, \theta = \alpha, \phi\}$. El vínculo del hilo establece:

$$z_2 = L - r \quad \Rightarrow \quad \dot{z_2} = -\dot{r}$$

Por consiguiente para la masa 1:

$$T_1 = \frac{m_1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin\alpha^2 \dot{\phi}^2) \qquad V_1 = -m_1 g r \cos\alpha$$

y para la masa 2:

$$T_2 = \frac{m_2 \dot{r}^2}{2} \qquad V_2 = -m_2 g (L - r)$$

El Lagrangiano es (sin el término constante $m_2 g L$) :

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{m_1}{2}\,r^2 \sin\alpha^2 \dot{\phi}^2 + gr(m_1 \cos\alpha - m_2)$$

Las ecuaciones de Lagrange ($\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$) son:
Para ϕ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0 \qquad \Rightarrow \; m_1 r^2 \sin\alpha^2 \dot{\phi} = l$$

Para r:

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2 r}{dt^2} = m_1 r \sin\alpha^2 \dot{\phi}^2 + g(m_1 \cos\alpha - m_2)$$

Las integrales primeras son resultado de integrar una vez las ecuaciones de Lagrange (ecuaciones diferenciales de segundo orden en el tiempo) y obtener expresiones que contienen solamente derivadas de primer orden con respecto al tiempo.

Las integrales primeras se corresponden con las magnitudes conservadas. Por ejemplo la obtenida de la ecuación en ϕ es la componente del momento angular en la dirección z. Esta magnitud se conserva pues el Lagrangiano (y la acción S) es invariante ante una rotación infinitesimal de la masa m_1: $\phi \to \phi + \epsilon$.

La correspondiente a la ecuación en r se puede obtener reemplazando $\dot{\phi} = l/(m_1 r^2 \sin\alpha^2)$ en la ecuación correspondiente a r y multiplicando por $\dot{r}$ la ecuación se puede integrar una vez para obtener:

$$\frac{(m_1 + m_2)\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2 m_1 r^2 \sin\alpha^2} + (m_2 - m_1 \cos\alpha) g r = E$$

Esta integral primera también se corresponde con una magnitud conservada, en este caso la energía. El mismo resultado podría haberse obtenido dada la simetría de Lagrangiano (y de la acción S) ante un desplazamiento infinitesimal en el tiempo: $t \to t + \epsilon$. Esta simetría lleva a la conservación del Hamiltoniano $H = \mathcal{L} - \sum p_i \dot{q}_i$, y dado que la energía cinética es función cuadrática homogenea de las velocidades generalizadas y que el potencial no depende de estas, sabemos que H es la energía ($E = T + V$).

Dadas las condiciones iniciales:

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r} = 0, \qquad \dot{\phi} = \frac{v_0}{r_0 \sin\alpha}$$

obtenemos:

$$l = m_1 r_0 \sin\alpha v_0, \qquad E = \frac{m_1 v_0^2}{2} + (m_2 - m_1\cos\alpha) g r_0$$

b) La ecuación de la energía se puede interpretar como correspondiente al de una partícula de masa $m_1 + m_2$ en un potencial efectivo $V_{ef}(r)$ dado por:

$$V_{ef}(r) = \frac{l^2}{2m_1 r^2 \sin\alpha^2} + (m_2 - m_1\cos\alpha) g r$$

Dependiendo del signo de $m_2 - m_1\cos\alpha$, podremos tener trayectorias acotadas o no. Si: $m_2 - m_1\cos\alpha > 0$, el potencial gravitatorio será atractivo, y la partícula se encontrará entre dos puntos de retorno como se muestra en la figura de la izquierda. En cambio si: $m_2 - m_1\cos\alpha < 0$, el potencial gravitatorio será repulsivo y las órbitas serán no acotadas pues el potencial centrífugo también es repulsivo como se muestra en la figura de la derecha.

Dentro de las posibles trayectorias acotadas la trayectoria circular se dá cuando la energía de la partícula se corresponde con el mínimo del potencial efectivo, de modo que $r = r_0$ para todo tiempo.

$$\frac{dV_{ef}(r)}{dr} = -\frac{l^2}{m_1 r^3 \sin\alpha^2} + g(m_2 - m_1\cos\alpha) \quad |_{r=r_0} = 0$$

Reemplazando el l en función de v_0 y de r_0 obtenemos:

$$m_1 \frac{v_0^2}{r_0 \sin\alpha} = (m_2 - m_1\cos\alpha) g \quad \rightarrow v_0 = \sqrt{g r_0 (\frac{m_2}{m_1} - \cos\alpha)}$$

Nuevamente vemos que la órbita circular es posible si $\frac{m_2}{m_1} > \cos\alpha$. Notar que la unidades son correctas y que el caso de la mesa con el agujero (Problema 6 guía de Lagrange) se corresponde con $\alpha = \pi/2$.

Esto también se podría haber obtenido usando las ecuaciones de Newton para cada masa. El cálculo de la tensión lo haremos precisamente usando Newton para la masa m_2, que está sujeta a la tensión T y al peso $m_2 g$:

$$T + m_2 g = \frac{d^2 z_2}{dt^2} = 0$$

dado que $z_2 = L - r_0$ es constante. Obtenemos entonces:

$$T = -m_2 g$$

Es negativa pues apunta hacia arriba.