1 La teoría de Jeans

El caso más simple de evolución de fluctuaciones es el de un fluído no relativista. las ecuaciones básicas son:

a) conservación del número de partículas

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(n\vec{v}\right) = 0 \tag{1}$$

b) Navier-Stokes (conservación del impulso)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{mn}\vec{\nabla}p \tag{2}$$

c) Poisson

$$\triangle\phi = 4\pi Gmn \tag{3}$$

Consideramos una perturbación a partir de una solución homogénea y estática; la solución no perturbada tiene $n = n_0, p = p_0, \vec{v} = 0$ y $\phi = 0$ (estafa de Jeans). Las cantidades perturbadas son, respectivamente, δn, δp, $\vec{v}$ y ϕ. Asumimos además $\delta p = \nu\delta n$ y definimos $\delta = \delta n/n_0$. Por lo tanto las ecuaciones para la perturbación son

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{v} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\nu}{m}\vec{\nabla}\delta \tag{5}$$

$$\triangle\phi = 4\pi Gmn_0\delta \tag{6}$$

Observamos que la vorticidad se conserva. Para la parte longitudinal, encontramos

$$\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\vec{v}\right)}{\partial t} = -4\pi Gmn_0\delta - \frac{\nu}{m}\triangle\delta \tag{7}$$

De donde deducimos la ecuación de ondas para δ

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \frac{\nu}{m}\triangle\delta - 4\pi Gmn_0\delta = 0 \tag{8}$$

En particular, consideramos una onda plana $\delta = \delta_k\left(t\right) exp\left[i\vec{k}\vec{r}\right]$

$$\frac{\partial^2 \delta_k}{\partial t^2} + \left[c_s^2 k^2 - 4\pi Gmn_0\right]\delta_k = 0 \tag{9}$$

donde $c_s^2 = \nu/m$ es la velocidad del sonido.

1.1 Modelo de Jeans en teoría cinética

Ahora empezamos con

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\vec{\nabla}_{x}f-m\vec{\nabla}\phi\vec{\nabla}_{p}f=0 \tag{10}$$

$$\triangle\phi=4\pi Gmn \tag{11}$$

$$n=\int\frac{d^{3}p}{h^{3}}\;f \tag{12}$$

La solución sin perturbar es $f=f_{0}\left(p\right)$, $\phi=0$. La ecuación para las perturbaciones es

$$\frac{\partial\delta f}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\vec{\nabla}_{x}\delta f-m\vec{\nabla}\phi\vec{\nabla}_{p}f_{0}=0 \tag{13}$$

$$\triangle\phi=4\pi Gm\delta n \tag{14}$$

$$\delta n=\int\frac{d^{3}p}{h^{3}}\;\delta f \tag{15}$$

Buscamos una solucion de la forma

$$\delta f=f_{1}\left(p\right)e^{i\vec{k}\vec{x}}e^{\sigma t} \tag{16}$$

$$\delta n=n_{1}e^{i\vec{k}\vec{x}}e^{\sigma t};\qquad n_{1}=\int\frac{d^{3}p}{h^{3}}\;f_{1}\left(p\right) \tag{17}$$

Por lo tanto

$$\left[\sigma+\frac{i}{m}\left(\vec{k}\vec{p}\right)\right]f_{1}=-i\frac{4\pi Gm^{2}}{k^{2}}\left(\vec{k}\vec{\nabla}_{p}f_{0}\right)n_{1} \tag{18}$$

Cuya solución es

$$f_{1}=-in_{1}\frac{4\pi Gm^{2}}{k^{2}}\frac{\left(\vec{k}\vec{\nabla}_{p}f_{0}\right)}{\sigma+\frac{i}{m}\left(\vec{k}\vec{p}\right)} \tag{19}$$

La solución debe satisfacer la condición de consistencia

$$n_{1}=\int\frac{d^{3}p}{h^{3}}\;f_{1}\left(p\right) \tag{20}$$

o sea

$$1 = -i\frac{4\pi G m^2}{k^2}\int \frac{d^3p}{h^3}\frac{\left(\vec{k}\vec{\nabla}_p f_0\right)}{\sigma + \frac{i}{m}\left(\vec{k}\vec{p}\right)} \tag{21}$$

Separando parte real e imaginaria, vemos que

$$\int \frac{d^3p}{h^3}\frac{\left(\vec{k}\vec{\nabla}_p f_0\right)}{\sigma^2 + \left(\frac{\vec{k}\vec{p}}{m}\right)^2} = 0 \tag{22}$$

(por ejemplo, si f_0 es par, esta condición se satisface por simetría) y

$$\frac{4\pi G m}{k^2}\int \frac{d^3p}{h^3}\frac{\left(\vec{k}\vec{p}\right)\left(\vec{k}\vec{\nabla}_p f_0\right)}{\sigma^2 + \left(\frac{\vec{k}\vec{p}}{m}\right)^2} = -1 \tag{23}$$

Supongamos para hacer una cuenta sencilla que f_0 es una distribución tipo Maxwell - Boltzmann

$$f_0 = n_0\left[\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right]^{-3/2}\exp\left\{-\frac{p^2}{2mk_BT}\right\} \tag{24}$$

y que $\vec{k}$ está orientado en la dirección z. Entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4\pi G}{k_BT}\int \frac{d^3p}{h^3}\frac{p_z^2 f_0}{\sigma^2 + \left(\frac{kp_z}{m}\right)^2} \\ &= \frac{4\pi G m^2 n_0}{k_BTk^2}\left[1 - \frac{\sigma^2}{n_0}\int \frac{d^3p}{h^3}\frac{f_0}{\sigma^2 + \left(\frac{kp_z}{m}\right)^2}\right] \end{aligned} \tag{25}$$

Se ve que $\sigma = 0$ cuando

$$k^2 = k_J^2 = \frac{4\pi G m^2 n_0}{k_BT} = \frac{4\pi G m n_0}{\langle v^2\rangle} \tag{26}$$

donde $\langle v^2\rangle = k_BT/m$

1.2 Soluciones a grandes escalas

Para encontrar la evolución de una perturbación de tamaño mucho mayor al horizonte, podemos argumentar que la perturbación se comporta como un Universo homogéneo en sí misma, y por lo tanto debe satisfacer las ecuaciones de Friedman

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{K^2c^2}{a^2} \tag{27}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\left(\rho + p\right) = 0 \tag{28}$$

Consideramos una solución no perturbada $(a_0, H_0, \rho_0, p_0, K = 0)$ y perturbaciones $(\delta a, \delta H, \delta\rho = \rho_0\delta, \delta p =$
Por lo tanto

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 \tag{29}$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + 3H_0\left(\rho_0 + p_0\right) = 0 \tag{30}$$

$$2H_0\delta H = H_0^2\delta - \frac{K^2c^2}{a_0^2} \tag{31}$$

$$\frac{\partial\left(\rho_0\delta\right)}{\partial t} + 3H_0\left(1+\nu\right)\rho_0\delta + 3\delta H\left(\rho_0 + p_0\right) = 0 \tag{32}$$

De 30 y 32

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + 3H_0\left(\nu - \frac{p_0}{\rho_0}\right)\delta + 3\delta H\left(1 + \frac{p_0}{\rho_0}\right) = 0 \tag{33}$$

Las ecuaciones se simplifican si $p_0 = \nu\rho_0$, en cuyo caso

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + 3\left(1+\nu\right)\delta H = 0 \tag{34}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 3\left(1+\nu\right)\frac{\partial}{\partial t}\delta H = 0 \tag{35}$$

Pero

$$\delta H = \frac{H_0}{2}\delta - \frac{K^2c^2}{2H_0a_0^2} \tag{36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta H = \frac{H_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\delta + \frac{\delta}{2}\frac{\partial}{\partial t}H_0 + \frac{K^2c^2}{2H_0^2a_0^2}\frac{\partial}{\partial t}H_0 + \frac{K^2c^2}{a_0^2} \tag{37}$$

De 31

$$\frac{K^2c^2}{a_0^2} = H_0^2\delta - 2H_0\delta H \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\delta H &= \frac{H_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\delta + \frac{\delta}{2}\frac{\partial}{\partial t}H_0 + \frac{H_0^2\delta - 2H_0\delta H}{2H_0^2}\frac{\partial}{\partial t}H_0 + H_0^2\delta - 2H_0\delta H \\ &= \frac{H_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\delta + \left[\delta - \frac{\delta H}{H_0}\right]\frac{\partial}{\partial t}H_0 + H_0^2\left[\delta - 2\frac{\delta H}{H_0}\right]\end{aligned} \tag{39}$$

Por otro lado, de las ecuaciones de Friedman

$$\frac{\partial}{\partial t}H_0 = -\frac{3}{2}H_0^2\left(1+\nu\right) \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta H = \frac{H_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\delta - \frac{3}{2}H_0^2\left(1+\nu\right)\left[\delta - \frac{\delta H}{H_0}\right] + H_0^2\left[\delta - 2\frac{\delta H}{H_0}\right] \tag{41}$$

Finalmente

$$\delta H = -\frac{1}{3\left(1+\nu\right)}\frac{\partial}{\partial t}\delta \tag{42}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta H = \frac{2H_0}{3\left(1+\nu\right)}\frac{\partial}{\partial t}\delta - \frac{1}{2}\left(1+3\nu\right)H_0^2\delta \tag{43}$$

Y la ecuación para las perturbaciones es

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + 2H_0\frac{\partial}{\partial t}\delta - \frac{3}{2}\left(1+\nu\right)\left(1+3\nu\right)H_0^2\delta = 0 \tag{44}$$

Durante la etapa dominada por la radiación $a \sim t^{1/2}$, $H = 1/2t$ y $\nu = 1/3$,

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\delta - \frac{1}{t^2}\delta = 0 \tag{45}$$

Si $\delta \sim t^n$, entonces $n = \pm 1$, o $\delta \sim a^2$.
Durante la etapa dominada por la materia $a \sim t^{2/3}$, $H = 2/3t$ y $\nu = 0$,

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + \frac{4}{3t}\frac{\partial}{\partial t}\delta - \frac{2}{3t^2}\delta = 0 \tag{46}$$

Si $\delta \sim t^n$, entonces

$$n^2 + \frac{n}{3} - \frac{2}{3} = 0 = \left(n - \frac{2}{3}\right)\left(n+1\right) \tag{47}$$

De modo que $\delta \sim a$.

1.3 Correcciones relativistas

Las ecuaciones para un fluído con correcciones relativistas son

a) conservación de la energía

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{v}) + p \left(\vec{\nabla} \vec{v} \right) = 0 \tag{48}$$

b) Navier-Stokes (conservación del impulso)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{c^2}{\rho + p} \vec{\nabla} p \tag{49}$$

c) Poisson

$$\triangle \phi = \frac{4\pi G}{c^2} (\rho + 3p) \tag{50}$$

La solución no perturbada corresponde a un modelo de Friedman con $\rho = \rho_0$, $p = p_0$, $\vec{v} = H_0 \vec{r}$ y $\phi = -\left(\dot{H}_0 + H_0^2 \right) r^2/2$. La ecuación de Poisson da

$$\dot{H}_0 + H_0^2 = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho_0 + 3p_0) = -\frac{H_0^2}{2} (1 + 3\nu) \tag{51}$$

que de hecho es equivalente a 40.

Las ecuaciones para la perturbación son

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + H_0 \left(\vec{r} \vec{\nabla} \right) \delta\rho + \rho_0 \vec{\nabla} (\delta \vec{v}) + p_0 \left(\vec{\nabla} \delta \vec{v} \right) + 3H_0 (1 + \nu) \delta\rho = 0 \tag{52}$$

$$\frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + H_0 \delta \vec{v} + H_0 \left(\vec{r} \vec{\nabla} \right) \delta \vec{v} = -\vec{\nabla} \delta\phi - \frac{c^2 \nu}{\rho_0 + p_0} \vec{\nabla} \delta\rho \tag{53}$$

$$\triangle \delta\phi = \frac{4\pi G}{c^2} (1 + 3\nu) \delta\rho \tag{54}$$

Asumiendo que igualmente $p_0 = \nu \rho_0$, $\delta\rho = \rho_0 \delta$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + H_0 \left(\vec{r} \vec{\nabla} \right) \delta + (1 + \nu) \vec{\nabla} (\delta \vec{v}) = 0 \tag{55}$$

$$\frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + H_0 \delta \vec{v} + H_0 \left(\vec{r} \vec{\nabla} \right) \delta \vec{v} = -\vec{\nabla} \delta\phi - \frac{c^2 \nu}{1 + \nu} \vec{\nabla} \delta \tag{56}$$

$$\triangle \delta\phi = \frac{3}{2} H_0^2 (1 + 3\nu) \delta \tag{57}$$

En el límite de grandes longitudes de onda, recuperamos el análisis anterior si $\delta = \delta(t)$ y $\delta \vec{v} = \delta H \vec{r}$. Entonces

$$\delta\phi = -\left[\frac{\partial}{\partial t}\delta H + 2H_0\delta H\right]\frac{r^2}{2} \tag{58}$$

Y la ecuación de Poisson exige que

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta H + 2H_0\delta H = \frac{-1}{2}H_0^2\left(1+3\nu\right)\delta \tag{59}$$

que es equivalente a 42 y 43.
En el caso general, las ecuaciones se simplifican si $\delta = \delta\left(t, \vec{q}\right)$, $\vec{q} = \vec{r}/a_0$, ya que

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + H_0\left(\vec{r}\vec{\nabla}\right)\delta = \left.\frac{\partial\delta}{\partial t}\right|_{\vec{q}} \tag{60}$$

De esta forma resulta

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \left(1+\nu\right)\frac{1}{a_0}\left(\vec{\nabla}\delta\vec{v}\right) = 0 \tag{61}$$

$$\frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} + H_0\delta\vec{v} = -\frac{1}{a_0}\left[\vec{\nabla}\delta\phi + \frac{c^2\nu}{1+\nu}\vec{\nabla}\delta\right] \tag{62}$$

$$\triangle\delta\phi = \frac{3}{2}a_0^2H_0^2\left(1+3\nu\right)\delta \tag{63}$$

Estas tres ecuaciones son equivalentes a una única ecuación de ondas para δ. Primero tomamos la divergencia de la segunda

$$\frac{\partial\vec{\nabla}\delta\vec{v}}{\partial t} + H_0\vec{\nabla}\delta\vec{v} = -\frac{1}{a_0}\left[\frac{3}{2}a_0^2H_0^2\left(1+3\nu\right)\delta + \frac{c^2\nu}{1+\nu}\triangle\delta\right] \tag{64}$$

Dividimos por a_0

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial\vec{\nabla}\delta\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{a_0}H_0\vec{\nabla}\delta\vec{v} = -\left[\frac{3}{2}H_0^2\left(1+3\nu\right)\delta + \frac{c^2\nu}{1+\nu}\frac{\triangle\delta}{a_0^2}\right] \tag{65}$$

Además

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial\vec{\nabla}\delta\vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{a_0}\vec{\nabla}\delta\vec{v} + \frac{1}{a_0}H_0\vec{\nabla}\delta\vec{v} \tag{66}$$

De modo que

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{a_0}\vec{\nabla}\delta\vec{v} = -\left[\frac{3}{2}H_0^2\left(1+3\nu\right)\delta + \frac{c^2\nu}{1+\nu}\frac{\triangle\delta}{a_0^2} + \frac{2}{a_0}H_0\vec{\nabla}\delta\vec{v}\right] \tag{67}$$

Resulta

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H_0 \frac{\partial \delta}{\partial t} - (1+\nu)\left[\frac{3}{2} H_0^2 (1+3\nu)\,\delta + \frac{c^2\nu}{1+\nu} \frac{\triangle \delta}{a_0^2}\right] = 0 \tag{68}$$

que en el límite de grandes longitudes de onda se reduce a la hallada anteriormente. Observamos que la longitud de Jeans

$$\lambda_J^2 = \frac{2\nu}{3\,(1+3\nu)\,(1+\nu)} \frac{c^2}{H_0^2} \tag{69}$$

Para $\nu = 1/3$, el factor vale $1/12$.