Turbulencia en Fluídos

Primer Cuatrimestre, 2002

Profesor: Daniel Gómez, **Auxiliares:** Pablo Mininni

Guía de Trabajos Prácticos Número **2**

NOTA: La selección de ejercicios que corresponden a la entrega están marcados con †.

---

1. En el marco de la teoría de Kolmogorov para turbulencia 3D, verifique que el número de grados de libertad N_{GL} necesarios para describir al sistema, escala como $N_{GL} \approx R^{9/4}$ con el número de Reynolds.

2. † Para flujos planos incompresibles, muestre que la energía

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x |\vec{u}|^2 \tag{1}$$

y la enstrofía

$$\Omega = \frac{1}{2} \int d^3x |\vec{w}|^2 \tag{2}$$

son invariantes ideales, y que el tiempo de disipación de enstrofía es mas corto que el de disipación de energía.

3. † Verifique que la energía

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x (|\vec{u}|^2 + |\vec{B}|^2) \tag{3}$$

la helicidad magnética

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{A} \cdot \vec{B}) \tag{4}$$

y la helicidad cruzada

$$K = \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{u} \cdot \vec{B}) \tag{5}$$

son invariantes ideales de las ecuaciones MHD incompresibles en tres dimensiones. En dos dimensiones, verifique que el rol de la helicidad ($H = 0$ en el caso 2D) es reemplazado por un nuevo invariante

$$H_{2D} = \frac{1}{2} \int d^3x |\vec{A}|^2 \tag{6}$$

4. Demuestre que $\forall(\vec{k}, \vec{k'}, \vec{k''})$ tal que $\vec{k} + \vec{k'} + \vec{k''} = 0$ vale $s(\vec{k}, \vec{k'}, \vec{k''}) + s(\vec{k'}, \vec{k''}, \vec{k}) + s(\vec{k''}, \vec{k}, \vec{k'}) = 0$, donde $s(\vec{k}, \vec{k'}, \vec{k''})$ es la parte real de $\frac{1}{2}[(\vec{k''} \cdot \vec{u'})(\vec{u} \cdot \vec{u''}) + (\vec{k'} \cdot \vec{u''})(\vec{u} \cdot \vec{u'})]$.

5. † Demuestre que para turbulencia isótropa es

$$(\partial_t + 2\nu k^2)E(k) = \iint_{\Delta_k} dk' \ dk" \ S(k,k',k") \tag{7}$$

donde

$$S(k,k',k") = 4\pi^2 kk'k" < s(\vec{k},\vec{k'},\vec{k"}) > \tag{8}$$

y el recinto de integración Δ_k es un rectángulo semiinfinito en el plano $(k', k")$, limitado por las rectas $k' + k" = k$, $k" = k' + k$, y $k" = k' - k$.

6. Verifique que en el rango inercial (es decir, $\epsilon(k) = \epsilon = cte$), la solución de la ecuación de Heisemberg es el espectro de Kolmogorov $E(k) = \epsilon^{2/3}k^{-5/3}$.

7. † Para resolver este ejercicio puede utilizar el código *Turbulence.F*

   Considere un fluído inicialmente en reposo, forzado en las direcciones x e y con una fuerza independiente del tiempo y de divergencia nula. El forzado está formado por la superposición de ondas armónicas cuyas longitudes de onda satisfacen la condición $k_{dn}^2 \leq k^2 \leq k_{up}^2$.

   (a) Elija un tamaño de grilla n de acuerdo a su capacidad de cálculo. Para dicha grilla, realice corridas para estimar la amplitud del forzado armónico y el paso de integración temporal Δt que puede utilizar. Elija ν teniendo en cuenta el tamaño de la grilla y la longitud de disipación.

   (b) Elija valores para k_{up} y k_{dn} teniendo en cuenta la frecuencia de Nyquist y el dealiasing. Realice graficos de energía en función del tiempo, para estimar el tiempo total T de la corrida y el paso temporal de almacenamiento de los resultados, de forma tal de alcanzar un estado de turbulencia desarrollada.

   (c) Para una corrida calcule la energía cinética en función del tiempo. Cómo crece la energía inicialmente? (Hint: puede realizar ajustes de funciones polinómicas por cuadrados mínimos usando la función *polyfit* de *Matlab*).

   (d) Calcule la enstrofía en función del tiempo. Compare el resultado con el obtenido en el punto anterior.

   (e) Calcule la vorticidad media, la vorticidad positiva ω_+, y la vorticidad negativa ω_-, en función del tiempo.

   (f) Calcule el espectro de energía para diferentes tiempos. En los primeros pasos de integración, puede identificar el rango en el cual entrega energía al sistema? Puede observar los procesos de cascada en función del tiempo? Para el estado de turbulencia desarrollada, puede identificar los diferentes rangos predichos por la teoría?

   (g) Calcule los exponentes que mejor ajustan al espectro en cada rango. Coinciden con lo esperado? Justifique. (Hint: si realiza corridas con un numero bajo de puntos de grilla, puede realizar varias corridas variando el rango espectral del forzado para obtener mejor resolución).

   (h) Optativo: Calcule la palinstrofía en función del tiempo, y la escala de disipación. Cómo compara con la escala de dealiasing?

8. Para resolver este ejercicio puede utilizar el código *MKHelmholtz.F* (o tambien el *mhd2D.F*), y los perfiles en dicho código como ejemplo.

Considere un magnetofluído con un perfil inicial de velocidad u_x que satisfaga condiciones de contorno periódicas en una caja de ancho 2π, para estudiar inestabilidades de Kelvin-Helmholtz.

(a) Genere un perfil perturbativo inicial de velocidad u_y periódico (preferentemente, use una función trigonométrica con número de onda chico). La amplitud de la perturbación debería ser 1 o 2 ordenes de magnitud menor que u_x.

(b) Genere una configuración inicial de campo magnético (Hint: utilice funciones trigonométricas con número de onda bajo). Las configuraciones que resultarán de interés son aquellas en las cuales las líneas de campo magnético resultan paralelas o perpendiculares a la interface. La amplitud inicial puede ser del orden, o un orden menor que la amplitud inicial de u_x.

(c) Elija un tamaño de grilla n, y la pendiente de la discontinuidad en el perfil de u_x que sea compatible con el valor de n elegido. Estime δt, ν y μ. Elija el tiempo total de la corrida T y el paso temporal de almacenamiento de forma tal de ver al sistema evolucionar hasta decaer a un único vortice por interface. (Hint: puede reducir este tiempo tomando condiciones iniciales adecuadas).

(d) Para una configuración inicial en la que las líneas de campo magnético sean perpendiculares a la interface:

i. Grafique la energía cinética, magnética y total en función del tiempo.

ii. Grafique la helicidad magnética y la helicidad cruzada en función del tiempo. Compare con el resultado del punto anterior.

(e) Repita los puntos (i) e (ii) para una configuración inicial en la que las líneas de campo magnético sean paralelas a la interface.

(f) Compare la dinámica temporal del potencial vector A_z y la vorticidad ω observada en los puntos (d) y (e). Observa alguna correlación entre ambos? En que caso? Puede explicar esta dinámica utilizando los invariantes ideales? (Hint: estudie el valor que toman los invariantes al evaluarlos en las condiciones iniciales).

9. † Para resolver el siguiente ejercicio puede utilizar el código *MTurbulence.F*. Considere un magnetofluido en reposo (campo de velocidades y magnético inicialmente nulos). En un instante se prende un forzado independiente del tiempo solo en el potencial vector. El forzado tiene las mismas características que el utilizado en el ejercicio 7.

(a) Repita los puntos (a) y (b) del ejercicio 7.

(b) Para una corrida, calcule la energia cinética, magnética y total en función del tiempo. Cuál es la fuente de energía cinética?

(c) Calcule la enstrofía y corriente cuadrática media en función del tiempo. Compare este resultado con el obtenido en el punto anterior.

(d) Calcule la helicidad cruzada y la helicidad magnética 2D. Compare la variación temporal de estas magnitudes con la de la energía.

(e) Calcule el espectro de energía para diferentes tiempos. Repita los puntos (f) y (g) del ejercicio 7. Qué pendiente espera observar en el rango inercial del espectro?

(f) Puede identificar procesos de reconexión?