Problemas
Formalismos de la Física Cuántica (3):
Operadores lineales, unitarios y Hermíticos [§]

1. **Representación Matricial**
   Caracterizar los elementos de matriz A_{pq} para matrices del operador $\hat{A}$ si tiene las siguientes propiedades

a) Simétrico	b) Antisimétrico	c) Ortogonal
d) Real	e) Puramente Imaginario	f) Hermítico
g) Antihermítico	h) Unitario	

2. **Operadores Hermíticos**:

   1. Señalar cuáles de los siguientes operadores son Hermíticos ($\hat{A}$ y $\hat{B}$ son Hermíticos):
      a) $\hat{x}$
      b) $\hat{p_x} = -i\hbar \frac{d}{dx}$
      c) $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$
      d) $\hat{A} + \hat{B}$
      e) $[\hat{A}, \hat{B}]$
   2. Encontrar los conjugados Hermíticos de los siguientes operadores:
      a) $(a\hat{A} + b\hat{B})$
      b) $(\hat{A}\hat{B})$
      c) $\hat{A}^\dagger$
      d) $\hat{A}^\dagger \hat{A}$
      e) $\hat{D} \equiv \frac{\partial}{\partial x}$
      f) $\hat{D}^2$
      g) $[\hat{A}, \hat{B}]$
      h) $\{\hat{A}, \hat{B}\}$
      i) $i[\hat{A}, \hat{B}]$
   3. Completar los elementos que faltan en la representación matricial de $\hat{C}$ para que el operador sea Hermítico
   $$C = \begin{pmatrix} 1 & 3i & 4 & 2 \\ \cdots & 2 & 7i & 3 \\ \cdots & \cdots & 4 & 9 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 6 \end{pmatrix}$$
   4. Demostrar que los valores propios de un operador Hermítico son reales.
   5. Mostrar que si un operador $\hat{B}$ tiene un autovalor $b_1 \neq b_1^*$, entonces $\hat{B}$ no es Hermítico
   6. Demostrar que las funciones propias de un operador Hermítico (no degenerado) son ortogonales.

3. **Operadores unitarios**

   1. Construir una matriz unitaria de 2×2 que tenga por lo menos 2 elementos imaginarios.
   2. Demostrar que la matriz de cambio de base es unitaria.

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/formalismo3

3. Sea $\hat{T} = e^{-i\hat{A}}$, donde $\hat{A}$ es un operador Hermítico. Demostrar que $\hat{T}$ es unitario.
4. El producto de dos operadores unitarios, es unitario?
5. Mostrar que los autovalores de un operador unitario tienen módulo 1
6. Mostrar, utilizando la propiedad anterior, que si dos autovectores de un operador unitario tienen distintos autovalores (o sea, no estan degenerados), entonces son ortogonales.

4. **Elementos de álgebra matricial**:

1. Sea $\hat{U}$ la transformación que cambia una base $\{\psi_n\}$ en una nueva base $\{f_n\}$. Expresar los elementos de esta matriz.
2. Mostrar que el producto interno se preserva bajo una transformación unitaria.
3. Sea $\hat{F}$ una matriz cuyos elementos en la base $\{\psi_n\}$ son

$$F_{nq} = \langle\psi_n|\hat{F}|\psi_q\rangle.$$

En la base $\{f_n\}$ representamos la matriz como

$$\tilde{F}_{nq} = \langle f_n|\hat{F}|f_q\rangle.$$

Mostrar que $\tilde{F}_{nq} = (\hat{U}\hat{F}\hat{U}^{-1})_{nq}$

4. Comparar los autovalores de $\hat{A}$ y $\hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}$
5. Si los autovalores de $\hat{A}$ son $\{\psi_n\}$, cuáles son los autovalores de $\hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}$?
6. Sea un operador $\hat{A}$ cuyos autovectores son $|a_i\rangle$. Sean $|b_i\rangle$ los vectores que se obtienen transformando los autovectores $|a_i\rangle$ con una transformación unitaria $\hat{U}$ (o sea, $\hat{U}|a_i\rangle = |b_i\rangle$. Supongamos que existe un operador $\hat{B}$ del cual los $|b_i\rangle$ son sus autovectores. Escribir $\hat{B}$ en función de $\hat{A}$ y $\hat{U}$.
7. Mostrar que la traza de un operador es invariante respecto a su representación. (o sea, es la misma independientemente de la base ortonormal en que esté escrita la matriz).
8. Encontrar algún ejemplo de la propiedad anterior.

5. **Operador Paridad**
El Operador Paridad $\hat{\mathcal{P}}$ se define como

$$\hat{\mathcal{P}}f(r) \equiv f(-r)$$

1. Encontrar dos autovalores y autovectores de éste operador
2. ¿Qué degeneración tienen?
3. Mostrar que $\{\hat{\mathcal{P}}, \hat{p}\} = 0$
4. Mostrar que $\hat{\mathcal{P}}$ conmuta con $\hat{T}$
5. Supongamos que una partícula en un pozo infinito entre $-L/2$ y $L/2$ se encuentra inicialmente en el estado

$$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{45L}}\left[6\sin(2\pi x/L) + 3\cos(\pi x/L)\right]$$

a) Calcular $\langle\mathcal{P}\rangle$ inicialmente
b) Si tenemos inicialmente un ensamble de 4500 cajas idénticas, cuántas (aproximadamente) de ellas estarán en un estado par?

c) Repetir la pregunta para un tiempo $t > 0$

d) Calcular $\langle \mathcal{P} \rangle$ para una partícula que inicialmente se encuentra en la siguiente combinación de estados estacionarios

$$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{1}{29}}(3\varphi_2 + 4\varphi_4 + 2\varphi_3)$$

e) Supongamos que no sabemos el estado de la partícula en este pozo, pero que medimos E_1, E_2 y E_3 con probabilidad $1/3$, y su paridad es -1. Si medimos luego la energía, ¿qué valor de $\hat{\mathcal{P}}$ encontraremos?

f) ¿Cambia la respuesta si decimos que la paridad inicial era $+1$?

6. **Proyector Paridad**
Para cualquier funcion $f(x)$ definimos unas funciones

$$f_{\pm}(x) \equiv \frac{f(x) \pm f(-x)}{2}$$

y unos *proyectores*

$$\hat{\mathcal{P}}_{\pm} \equiv \frac{\hat{\mathbf{I}} \pm \hat{\mathcal{P}}}{2}$$

(a) Mostrar que $f_+(x)$ es una función par y $f_-(x)$ impar

(b) Calcular $\hat{\mathcal{P}}_{\pm} f(x)$. Esto explica el nombre de *proyector*.

(c) Mostrar las siguientes propiedades de los proyectores

   i. $\hat{\mathcal{P}}_{\pm}^2 = \hat{\mathcal{P}}_{\pm}$

   ii. $[\hat{\mathcal{P}}_+, \hat{\mathcal{P}}_-] = 0$

   iii. $\hat{\mathcal{P}}_+ + \hat{\mathcal{P}}_- = \hat{\mathbf{I}}$

7. **Operadores (general)**

1. Sea $\hat{A}(t)$ un operador que depende de una variable t, y supongamos que la derivada $\frac{d\hat{A}}{dt}$ existe. Encontrar los elementos de matriz de esta derivada en una base de vectores independientes de t.

2. Encontrar los elementos de matriz de $\frac{d(\hat{A}\hat{B})}{dt}$

3. Calcular $e^{\hat{A}t}$

4. (*) Supongamos dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ que conmutan con $[\hat{A}, \hat{B}]$. Se define al operador

$$\hat{F}(t) = e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t}.$$

Se debe demostrar que

$$\hat{F}(t) = e^{(\hat{A}+\hat{B})t} e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]t^2}.$$

Ayuda:

a) Derivar $\frac{d\hat{F}}{dt}$

b) Hallando $[e^{\hat{A}t}, \hat{B}]$, cacular $e^{\hat{A}t}\hat{B}$

c) Reemplazar esta expresión en 7(4)a

d) Integrar $\frac{d\hat{F}}{dt}$ (incluyendo condición inicial)