Problemas
Perturbaciones dependientes del tiempo §

1. **Perturbación Sinusoidal en dos niveles**
   Este es el nombre genérico con que se conoce una perturbación (en un sistema de dos niveles a y b) del tipo
   $$\hat{H}'(r,t) = \hat{V}(r)\cos(\omega t),$$
   donde V es no–diagonal (sólo $V_{ab} \equiv \langle\psi_a|V|\psi_b\rangle$ y V_{ba} son distintos de cero).
   (a) Demostrar que cerca de resonancia, y a primer orden de perturbación, el coeficiente
   $$C_b(t) \approx \frac{-iV_{ba}}{\hbar}\left[\frac{\sin(\omega_0-\omega)t/2}{(\omega_0-\omega)}\right]e^{i(\omega_0-\omega)t/2}$$
   (b) Discutir la relación entre la solución en primer orden y el principio de incertidumbre
   (c) Discutir la validez de la aproximación resonante en el tiempo
   (d) Discutir la validez de la aproximación de 1^{er} orden

2. **Oscilador armónico con perturbación**
   Considerar una partícula de carga q y masa m sujeta a un potencial de oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω. A tiempo $t = 0$ se enciende un campo eléctrico, agregando una perturbación
   $$H' = e|E|x$$
   (a) Calcular la energía del nuevo estado fundamental
   (b) Si el campo se apaga en un tiempo mucho menor a $1/\omega$, ¿cuál es la probabilidad que una partícula, inicialmente en el estado fundamental, quede en el mismo estado?
   (c) Calcular la probabilidad P_{01} de que la partícula se encuentre en el estado $n = 1$
   (d) Repetir para $n = 2$ (<u>Respuesta</u>: $P_{02} = \frac{P_{01}^2}{2!}$).

3. Sea una partícula cargada en el estado $n = 2$ de un oscilador armónico de dimensión 1. Se introduce al tiempo $t = 0$ un campo eléctrico constante E. Para tiempos muy grandes, ¿cuál es la probabilidad de excitar otros estados en primer orden de teoría de perturbaciones?

4. Considerar una partícula de carga q y masa m sujeta a un potencial de oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω. Este sistema es perturbado por un campo eléctrico de magnitud
   $$E(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}\tau}e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$
   que actúa en la dirección x, que es la dirección en la que se mueve la partícula. Calcular el "momento lineal clásico" de la perturbación. Si a $t = -\infty$ el oscilador está en el estado fundamental, encontrar, a primer orden en teoría de perturbaciones la probabilidad de que se produzca una transición a los diferentes estados excitados a $t = +\infty$.
   <u>Ayuda</u>: $\int_{\infty}^{\infty} e^{-au^2}e^{i\omega u}du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
   <u>1 Respuesta</u>: $P_{01} = \frac{(qA)^2/2m}{\hbar\omega}e^{-\frac{(\omega\tau)^2}{2}}$.

§ http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/perturbacionest1

5. **Atomo de hidrógeno en un capacitor**
Se coloca un átomo de hidrógeno (en su estado fundamental) entre las placas paralelas de un capacitor. A partir de un tiempo t se le aplica un campo eléctrico que decae exponencialmente

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

   (a) Calcular en forma general la probabilidad de que el electrón se encuentre en un estado excitado.
   (b) Suponiendo que $E_0 = 5$ a.u. y $\tau = 2$ a.u., calcular la probabilidad de encontrar el átomo en los 2 primeros estados excitados.

6. Un átomo de hidrógeno está perturbado por un campo eléctrico homogéneo y dependiente del tiempo

$$E(t) = \frac{B\tau}{e\pi}\frac{1}{\tau^2 + t^2}$$

donde B y τ son constantes. Si a $t \to -\infty$ el átomo se encuentra en el estado fundamental, calcular la probabilidad de encontrarlo en un estado $2p$ para $t \to \infty$.

7. **Cambio súbito en el Hamiltoniano**
Una partícula se encuentra en el estado fundamental de un pozo infinito de potencial (unidimensional). Calcular la probabilidad de encontrar la partícula en los estados $n = 1, 2, 3$ cuando las paredes del pozo se desplazan haciendo el ancho del pozo el doble del pozo original

8. Una partícula de masa m está confinada en una caja de potencial entre $x = 0$ y $x = a$. Inicialmente, la partícula se encuentra en la mitad izquierda del pozo, con probabilidad constante.
   (a) Escribir la función de onda en función del tiempo
   (b) Calcular la probabilidad de encontrar la partícula en el autoestado n
   (c) Calcular el valor medio de la energía

9. **Decaimiento β en el Tritio**
El tritio es un isótopo del hidrógeno, que tiene 1 protón y 2 neutrones. Este sistema puede hacer un decaimiento β, en el cual la carga del núcleo cambia súbitamente a $+2$, convirtiéndose en un isótopo del Helio (^{3}He). Si el electrón está inicialmente en el estado fundamental del tritio, calcular la probabilidad que permanezca en el estado fundamental luego del decaimiento β.
Respuesta: $P = 0.702$.

10. **Perturbación adiabática**
Considerar una partícula confinada en un pozo infinito de ancho a. A partir de tiempo $t = 0$, **muy lentamente**, y durante un tiempo t, se ensancha el pozo hasta un ancho αa. Calcular las nuevas funciones de onda y energías. ¿La partícula gana o pierde energía?

11. **Rotating wave approximation**
Esta aproximación consiste en reemplazar la perturbación

$$\hat{V}'(t) = \hat{V}\cos(\omega t)$$

por

$$\hat{V}'(t) = \frac{\hat{V}}{2}e^{-i\omega t}$$

   (a) Para un sistema de dos niveles a y b, con perturbación no–diagonal, el problema tiene solución exacta. Expresar la solución en términos de la *frecuencia de Rabi*

   $$\omega_R = \frac{1}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + (\frac{V_{ab}}{\hbar})^2}$$

   (b) Describir la solución, e interpretar físicamente la frecuencia de Rabi
   (c) Comprobar que la suma de probabilidades se conserva
   (d) Comprobar que si la perturbación es chica, el resultado coincide con el de perturbación

12. **Problemas adicionales**
Considerar una partícula de masa M que se mueve con frecuencia ω en un potencial armónico de una dimensión. Añadir una perturbación $V = \frac{1}{2}bx^2$. Suponiendo que la perturbación actúa solamente en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq \tau$, calcular la probabilidad de que los estados con $n = 1$ y con $n = 2$ estén excitados al tiempo τ, usando teoría de perturbaciones de primer orden. ¿En qué orden de teoría de perturbaciones se pueblan los estados con $n = 3$ y con $n = 4$?

13. Suponer que a un oscilador armónico con frecuencia ω_0 se le cambia la frecuencia a $\omega_{new} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}$ con $\omega_1^2 \ll \omega_0^2$ durante un cierto tiempo $0 < t < \tau$. Suponer que una partícula estaba en el estado fundamental para $t \leq 0$.
   (a) Escribir el nuevo Hamiltoniano.
   (b) Usando teoría de perturbaciones de primer orden, qué estados (fuera del fundamental) se habrán poblado, y con qué probabilidad, para $t = \tau$?

14. Considerar un sistema con dos estados estacionarios $|1\rangle$ y $|2\rangle$. La diferencia de energía entre estos dos estados es $E_2 - E_1 = \hbar\omega$. El sistema se encuentra en el estado mas bajo, y a un tiempo t se le aplica una perturbación pequeña H_1 cuya representación en la base dada es

$$\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega_0 \\ \hbar\omega_0 & -\hbar\omega \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar la posibilidad de hallar el sistema en cada uno de los estados.
   (b) Resolver exactamente el problema y comparar con los resultados perturbativos.
   (c) Encontrar a qué tiempo el sistema se encuentra en el estado $|2\rangle$.

15. Un oscilador armónico unidimensional está en el estado fundamental para $t < 0$. A cierto $t > 0$ se lo somete a una fuerza

$$F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$$

(a) Encontrar la probabilidad de que el sistema se encuentre en el primer estado excitado (en primer orden de perturbación).

(b) Mostrar que a $t \to \infty$, esta probabilidad es independiente del tiempo (¿por qué?)

(c) ¿Se pueden encontrar otros estados excitados?

16. Un oscilador armónico unidimensional está en el estado fundamental para $t < 0$. A $t > 0$ se enciende una perturbación

$$F(t) = F_0 x \cos(\omega t)$$

(a) Encontrar $\langle x \rangle$ en el orden mas bajo (no nulo) de perturbación

(b) ¿Qué pasa si $\omega \approx \omega_0$?

17. El Hamiltoniano

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1^0 & 0 \\ 0 & E_2^0 \end{pmatrix}$$

es perturbado por

$$\hat{V}_{12} = \lambda \cos(\omega t)$$

(a) Si a $t = 0$ el sistema está en 1, encontrar la posibilidad de hallarlo luego en 2

(b) ¿Qué pasa si $|E_2^0 - E_1^0| \approx \hbar\omega$?