Prefinal de Relatividad General (1er cuatrimestre 2006)

1. Dos partículas masivas caen radialmente en un agujero negro esférico de masa M. Ambas partículas comienzan en $r \to +\infty$. Una de ellas tiene energía por unidad de masa $e = 1$ y la otra $e = 2$, donde $e \equiv -\xi \cdot \mathbf{u}$ (con $\mathbf{u}$ el vector velocidad de la partícula y ξ el vector de Killing asociado a la simetría ante translaciones temporales de la métrica).

a) Cuál es la velocidad inicial de cada partícula que mide un observador estacionario en $r \to +\infty$?

b) De acuerdo a las mediciones de otro observador estacionario situado en $r = 6MG$, cuánto más rápido se mueve una partícula respecto de la otra cuando pasan por su laboratorio?

c) Cuánto tiempo propio transcurre desde que la partícula con $e = 1$ pasa por el laboratorio del observador situado en $r = 6MG$ hasta que llega al horizonte?

2. Considerar la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker para un universo espacialmente plano. Suponer que el universo está compuesto por un solo tipo de fluido con ecuación de estado $p = \omega\rho$, donde $\omega > -1/3$.

a) Usando las ecuaciones de Friedmann,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho \\ \frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \end{aligned}$$

hallar el factor de escala como función del tiempo.

b) Suponiendo conocido el valor del tamaño actual del horizonte de partículas $d_H(t_0)$ y de ω, halle la edad del universo.

c) Calcule el tamaño que tenía el horizonte de partículas en el momento en que fueron emitidos los fotones que hoy (en $t = t_0$) presentan un corrimiento al rojo cosmológico de $z = 20$. Compárelo con el valor actual $d_H(t_0)$.

d) Qué ocurre con el tamaño del horizonte si $-1 < \omega < -1/3$?

3. El *diagrama inmerso* en $\Re^3$ de un toro bidimensional puede realizarse parametrizándolo con coordenadas θ y ϕ (que varían entre 0 y 2π) de la siguiente manera:

$$x = \cos(\phi)[1 + \rho\sin(\theta)]\,,\; y = \sin(\phi)[1 + \rho\sin(\theta)]\,,\; z = \rho\cos(\theta),$$

donde (x, y, z) son coordenadas cartesianas y $\rho \in (0, 1)$ es una constante.

a) Obtenga la métrica sobre el toro a partir de la métrica $g_{ij} = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ de $\Re^3$.

b) Halle la ecuación de las geodésicas y analice si existen cantidades conservadas.

c) Encuentre dos soluciones particulares cualitativamente diferentes de las ecuaciones halladas en el punto b). Interprete geométricamente.