

Recuperatorio de Relatividad General (1er cuatrimestre 2006)

1. Suponer un universo compuesto por un fluido con densidad de energía ρ y presión $p = \omega\rho$, con $\omega > -1/3$. Considerar la métrica de Friedmann-Robertson-Walker y las ecuaciones de Friedmann en presencia de constante cosmológica Λ ,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt}\right)^2 &= \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \\ \frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}.\end{aligned}$$

a) Obtener la dependencia de la densidad de energía con el factor de escala.

b) Qué signos deben tener k y Λ para que existan soluciones estáticas? Son estables estas soluciones?

c) Suponer ahora que $k = 0$ y $\Lambda > 0$. Describa *cualitativamente* la evolución del factor de escala.

2. Considerar la siguiente métrica de un agujero negro en 2+1 dimensiones:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + A^{-1}(r)dr^2 + r^2(N(r)dt + d\phi)^2,$$

donde $A(r) = -M + r^2/\ell^2 + \ell^2 M^2/(4r^2)$, $N(r) = -M\ell/(2r^2)$ y con coordenadas (t, r, ϕ) , tales que $-\infty < t < +\infty$, $0 < r < +\infty$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Suponer $M > 0$ y $r > \ell\sqrt{M/2}$.

a) Hallar las cantidades conservadas a lo largo de una geodésica.

b) Existen geodésicas radiales?

c) Hallar el potencial efectivo y analizar la existencia de órbitas circulares.

3. Considerar la siguiente métrica con simetría esférica:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

donde r es una coordenada radial y R una constante.

Suponer que un objeto masivo es lanzado radialmente (en el sentido de r creciente) desde $r = 2R$, de manera tal que éste llega a $r = 6R$ con velocidad nula.

a) Calcular la distancia recorrida por el objeto.

b) De acuerdo con las mediciones de un observador estacionario en $r = 2R$, con qué velocidad es lanzado el objeto?

c) Hallar la cuadrivelocidad del objeto como función de su coordenada radial r .