Relatividad General - Guía 6: Ecuaciones de Einstein

1. Principio variacional. Deduzca las ecuaciones de Einstein a partir de la acción:

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{g}R + S_{materia}$$

(Ayuda: note que la variación $\delta\Gamma^l_{ik}$ es un tensor, y que en un sistema localmente inercial

$$g^{ab}\delta R_{ab} = -g^{ab}[(\delta\Gamma^l_{ab})_{,l} - (\delta\Gamma^l_{al})_{,b}] = w^l_{,l}$$

En consecuencia, en un sistema de coordenadas cualquiera, $\sqrt{g}g^{ab}\delta R_{ab}$ es una derivada total.)

2. Solución de Reissner-Nordstrom. Encontrar la solución estática de las ecuaciones de Einstein y Maxwell que describe la geometría alrededor de un objeto de masa M y carga Q. Para ello:

(a) Resolver las ecuaciones de Maxwell de vacío asumiendo que la única componente no nula de $F^{\mu\nu}$ es F^{0r}

(b) Utilizar la solución obtenida para calcular el $T_{\mu\nu}$ electromagnético. Cuánto vale la traza de este tensor?

(c) Resolver las ecuaciones de Einstein utilizando el $T_{\mu\nu}$ electromagnético como fuente

Ayuda: suponer que $g_{00} = -1/g_{rr}$

3. Considerar una esfera formada por materia no relativista, de densidad homogénea ρ y presión despreciable, que rota lentamente con velocidad angular constante ω.

(a) Escribir el tensor energía–impulso del sistema a primer orden en ω.

(b) Mostrar que la solución de las ecuaciones de Einstein linealizadas adopta en el gauge de Lorentz la siguiente forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad h_{00} = \Phi, \qquad h_{0i} = A_i, \qquad h_{ij} = \Phi\delta_{ij}.$$

(c) Encontrar Φ y A_i al orden más bajo no nulo a grandes distancias de la fuente.

4. Teorema de Birkhoff. Demostrar que toda solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein de vacío es necesariamente estática y coincide con la de Schwarzschild. Concluya que la métrica dentro de una cáscara esférica debe ser plana.

(Ayuda: Para demostrar el teorema considere la métrica con simetría esférica más general y muestre que eligiendo las coordenadas adecuadamente puede llevarse a la forma

$$ds^2 = -B(r,t)dt^2 + A(r,t)dr^2 + r^2d\Omega^2.$$

Encuentre $A(r,t)$ y $B(r,t)$ a partir de las ecuaciones de Einstein).

5. Agujero negro en 3 dimensiones. Considere la relatividad general en $2+1$ dimensiones, en presencia de constante cosmológica $\Lambda = -2l^{-2}$.

(a) Muestre que la siguiente métrica es solución de las ecuaciones de Einstein

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(N(r)dt + d\phi)^2$$

donde

$$B(r) = A^{-1}(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \qquad N(r) = -\frac{J}{2r^2}$$

(b) Qué relación deben cumplir las constantes M, J y l para que la métrica posea horizontes?

6. Solución dentro de una estrella. Encuentre la solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el interior de un fluido ideal con $\rho = cte$ (ver *A first course in General Relativity*, B.F. Schutz, Cap. 10).