Relatividad General - Guía 7: Métrica de Schwarzschild

1. Usando la teoría gravitatoria de Newton y suponiendo que un fotón es una partícula "no relativista" que se mueve con velocidad c en ausencia de gravedad, calcular el ángulo en que es deflectado un fotón cuando pasa cerca de una estrella. Compare el ángulo obtenido con el resultado de la relatividad general.

2. Un observador situado en la coordenada de Schwarzschild $r = r_0$ emite una señal luminosa de frecuencia ω_0. Esa señal llega a otro observador situado en $r = r_1$. Cuál es la frecuencia medida por el segundo observador ?

3. Considere el movimiento de un cometa en el campo gravitacional de una estrella de masa M. Suponga que el cometa proviene desde muy lejos de la estrella con parámetro de impacto b. El cometa pasa cerca de la estrella y luego se aleja indefinidamente. Suponga que el punto de la trayectoria del cometa más cercano a la estrella tiene coordenada de Schwarzschild $r = R$ y que en ese punto se encuentra un observador estacionario. Halle la velocidad del cometa cuando pasa por tal punto medida por dicho observador.

4. Suponga que en alguna teoría de la gravedad (no en la de Einstein) la métrica en el exterior de una estrella esférica está dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)[-dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)].$$

Suponiento que los fotones se mueven a lo largo de geodésicas nulas, calcular el ángulo de deflección de la luz que pasa cerca de la estrella. Luego de resolver el problema, discuta si hay una manera más simple de obtener el resultado.

5. Generalmente, las órbitas de una partícula en la geometría de Schwarzschild no se cierran luego de una vuelta. Explicar por qué debe haber un conjunto de valores de las cantidades conservadas para los cuales las órbitas se cierran luego de un número de vueltas mayor que uno. Hallar numéricamente el valor de ϵ para el cual la órbita se cierra luego de 4 vueltas cuando $\ell = 4.6$, donde $\ell \equiv \eta \cdot \mathbf{u}$ (con $\mathbf{u}$ el vector velocidad de la partícula y η el vector de killing asociado a la simetría esférica de la métrica). Graficar. Ayuda: puede utilizar el programa Mathematica. Ver por ejemplo http://wps.aw.com/aw_hartle_gravity_1/0,6533,512496-,00.html

6.(Para estudiantes de doctorado) Calcule el tiempo necesario para que una señal de radar viaje desde la Tierra a Mercurio (ida y vuelta). Muestre que por efectos de la Relatividad General, la señal tarda más tiempo del que tardaría si viajara en línea recta. Estime el retraso para el caso en que Mercurio, el Sol y la Tierra se encuentren aproximadamente alineados, y la señal pase cerca de la superficie del Sol.

7. Un locutor de radio está describiendo su caída radial dentro de un agujero negro de Schwarzchild. Cuando se acerca al radio de Schwarzchild, su frecuencia de emisión se corre enormemente al rojo con una dependencia temporal aproximada $e^{-t/\alpha}$, donde t mide el tiempo propio en el infinito. A partir del valor de la constante α, deduzca la masa del agujero negro.

8. Un observador cae radialmente en un agujero negro esférico de masa M. El observador comienza en reposo con respecto a otro observador estacionario en $r = 10MG$. Calcule el tiempo propio que transcurre hasta que el observador llega a la singularidad.

9. Construir "diagramas inmersos" para las siguientes métricas (c=1):

a) Estrella de masa M con densidad uniforme y radio $R > 2MG$, para $\theta = \theta_0$ y $t = t_0$,

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)G}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

con

$$m(r) = \begin{cases} \frac{r^3}{R^3}M, & (r < R); \\ M, & (r > R). \end{cases}$$

b) La extensión de Kruskal de la métrica de Schwarzschild, para los valores $V = 0$ y $V = 0.9$, con $\theta = \theta_0$,

$$ds^2 = 32\frac{(MG)^3}{r}e^{-r/(2MG)}(-dV^2 + dU^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

c) La métrica de un agujero de gusano estático, para $\theta = \theta_0$,

$$ds^2 = dr^2 + (b^2 + r^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

(el diagrama explica el nombre de esta métrica)

10. La métrica de un agujero negro rotante, restringida al plano $\theta = \pi/2$, puede escribirse como:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 - \frac{4aM}{r}dtd\phi + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + (r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r})d\phi^2 \tag{1}$$

donde $a = J/M$ es el impulso angular por unidad de masa y $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$

a) Obtenga las cantidades conservadas a lo largo de las geodésicas.

b) Muestre que no es posible caer radialmente hacia el agujero negro.

c) Obtenga la ecuación de la órbita para una partícula que inicialmente está en el infinito, con impulso angular y energía cinética nulos.