Relatividad General - Guía 8: Cosmología

1. Considere una métrica espacial tridimensional. Homogeneidad e isotropía implican que existen coordenadas r, θ, ϕ tales que

$$ds^2 = A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{1}$$

Muestre que la condición $R = cte$ (siendo R el escalar de Ricci) implica que $A(r) = (1 - kr^2)^{-1}$, donde k puede elegirse $0, \pm 1$ luego de reescalear la coordenada r. [Ayuda: debe cumplirse que $A(0) = 1$ para que la métrica sea localmente plana en $r = 0$]

2. Considere la métrica anisótropa $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + c^2(t)dz^2$.

a) Escriba la ecuación de las geodésicas. Determine los vectores de Killing y las cantidades conservadas.

b) Calcule el corrimiento al rojo para fotones que se mueven en el plano (x, y), estudiando cómo depende con el tiempo la energía de un fotón a lo largo de la geodésica.

3. Demostrar que si una geodésica temporal de la métrica de Friedman Robertson Walker tiene una velocidad $\vec{v_1}$ en un instante t_1 respecto del sistema de coordenadas comóviles (velocidad peculiar), tendrá una velocidad $\vec{v_2}$ en el instante t_2 tal que $(c = 1)$

$$a(t_2)\gamma_2|\vec{v_2}| = a(t_1)\gamma_1|\vec{v_1}|, \tag{2}$$

donde $\gamma_S = (1 - |\vec{v_s}|)^{-1/2}$ $(s = 1, 2)$ y $|\vec{v_s}|^2 = g_{ij}v_s^i v_s^j$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Mostrar que en el límite $|\vec{v}| \to c$ se obtiene la fórmula del corrimiento al rojo para un fotón.

4. Considere un tensor $T^{\mu\nu}$ en un espacio de Robertson Walker plano. Sus componentes en coordenadas comovientes son $T^{00} = A(t)$, $T^{0i} = 0$, $T^{ij} = B(t)\delta^{ij}$.

a) Evalue la cuadridivergencia $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$.

b) Obtenga las componentes del tensor en coordenadas esféricas.

5. Obtener las soluciones de las ecuaciones de Friedman en los siguientes casos:

a) universo dominado por la materia, $k = 0, \pm 1$;

b) universo dominado por la energía de vacío, $k = 0, \pm 1$.

c) Para las soluciones halladas en el caso $k = 0$, discuta la existencia de horizontes de partículas.

6. Considere la solución hallada en el punto a) del problema anterior con $k = +1$:

a) Muestre que el elemento de línea puede escribirse como

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \tag{3}$$

donde η es el denominado tiempo conforme.

b) Haga un diagrama espaciotemporal indicado el big bang, el big crunch, y el cono de luz pasado de un observador comóvil situado en el orígen en el momento de expansión máxima.

c) Diga si el observador puede o no recibir información proveniente de todas las partes de este universo (finito espacialmente) antes del big crunch.

d) En el tiempo transcurrido desde el big bang hasta el big crunch, un obsevador podría atravesar la circunferencia entera del universo?

7. Considerar la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker para un universo espacialmente plano. Suponer que una fracción de la densidad actual de energía del universo es materia no relativista (polvo) Ω_M y que la fracción restante corresponde al vacío Ω_v. Usando las ecuaciones de Friedmann:

a) halle el factor de escala como función del tiempo, de la constante de Hubble actual H_0 y de Ω_v;

b) Cuán grande debería ser Ω_v para que hoy el universo esté acelerándose ($\frac{d^2a}{dt^2} > 0$) ?

c) obtenga la expresión de la edad del universo como función de H_0 y Ω_v.

Ayuda:

$$\int dx \left(\frac{x}{1 + b(x^3 - 1)} \right)^{1/2} = -\frac{1}{3\sqrt{b}} \ln \left[\frac{\sqrt{1 + b(x^3 - 1)} - \sqrt{bx^3}}{\sqrt{1 + b(x^3 - 1)} + \sqrt{bx^3}} \right]$$

8. a) Calcular la expresión analítica de la edad del universo, t_U, en el caso general de un modelo de Friedman Robertson Walker con materia no-relativista, radiación, constante cosmológica (y curvatura). Resolver numéricamente con los parámetros actuales para cada componente (dados por las últimas observaciones).

b) Graficar $H_0 t_U$ (con H_0 el valor actual de la "constante" de Hubble) en función del valor actual de Ω_M para un universo plano (esto es, $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$) y para el caso de un universo sin constante cosmológica, $\Omega_\Lambda = 0$. Interpretar estos resultados.