Estructura de la Materia 4
Práctica 2: Isospin, SU(2), SU(3).

Segundo Cuatrimestre 2010

1. Usando invariancia de isospin en interacciones fuertes, muestre que el cociente de las siguientes secciones eficaces verifica

$$\frac{\sigma(pp \to \pi^+ d)}{\sigma(np \to \pi^0 d)} = 2 \ ,$$

2. El Σ^{*0} puede decaer en $\Sigma^-\pi^+, \Sigma^0\pi^0, \Sigma^+\pi^-$. A partir de la conservación del isospin en las interacciones fuertes indique qué porcentaje espera en cada canal.

3. Encuentre el cociente entre las secciones eficaces de las reacciones

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & \pi^- + p & \to & K^0 + \Sigma^0 \\ \text{(II)} & \pi^0 + p & \to & K^+ + \Sigma^0 \\ \text{(III)} & \pi^+ + p & \to & K^+ + \Sigma^+ \end{array}$$

   suponiendo la conservación en las mismas y según predomine el canal de isospin 1/2 ó 3/2.

4. Usando la conservación del isospin en las interacciones fuertes, encuentre relaciones entre las secciones eficaces de dispersión elástica $\sigma_A(\Sigma^+ p \to \Sigma^+ p)$, $\sigma_B(\Sigma^- p \to \Sigma^- p)$ y de intercambio de carga $\sigma_C(\Sigma^- p \to \Sigma^0 n)$.

5. Al estudiar la reacción $K^-p \to \Sigma^+\pi^-$ en función de la energía se observa la formación de una resonancia a 1660 MeV en el c.m. ¿Qué se puede decir de los números cuánticos de ésta? Muestre que el isospin no queda unívocamente determinado, y que el estudio del estado final $\Sigma^0\pi^0$ permite decidir entre las diversas posibilidades.

6. El proceso $dd \to \alpha\pi^0$ no ha sido jamás observado. Explique por qué en términos del isospin de las partículas (el deuterón d y la partícula α tienen isospin cero).

---

7. A partir de la combinación de tres objetos con simetría SU(2), construya las funciones de onda resultantes y aplíquelas a los casos de spin e isospin. Para este segundo caso, determine la carga e isospin global de los estados obtenidos. Suponiendo que la función de onda total (spin$\times$isospin) es totalmente simétrica, muestre a los objetos de isospin 3/2 (1/2) les corresponde necesariamente spin 3/2 (1/2).

8. Muestre que con las funciones de onda de protón y neutrón totalmente antisimétricas se predice $\mu_n/\mu_p = -2$, y que el momento magnético del protón es negativo, en total contradicción con los resultados experimentales, mientras que con las simétricas se obtienen los valores correctos.

9. Una transformación unitaria arbitraria en el espacio SU(3) se puede escribir como

$$\Psi'(x) = U(\epsilon^a)\,\Psi(x) = e^{i\,\epsilon^a \frac{\lambda_a}{2}}\,\Psi(x) \quad a = 1, \ldots, 8$$

donde ϵ^a son ocho parámetros reales que caracterizan la transformación, y λ_a son el análogo de las matrices de Pauli pero para SU(3):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que λ_1, λ_2, y λ_3, generan rotaciones en el espacio de isospín.
b) Verifique que $I_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$, $U_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7)$, y $V_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5)$ son los operadores de subida y de bajada para isospín, u-espín, y v-espín.
c) Muestre que los generadores λ_a satisfacen relaciones análogas a las de las matrices de Pauli de SU(2)

$SU(2)$	$SU(3)$
$tr\,\sigma_i = 0$	$tr\,\lambda_a = 0$
$tr\,\sigma_i\sigma_j = 2\delta_{ij}$	$tr\,\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}$
$[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}] = i\,\epsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$	$[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}] = i\,f_{abc}\frac{\lambda_c}{2}$

donde las constantes de estructura f_{abc} son antisimétricas ante el intercambio de pares de índices ($f_{123} = 1$, $f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}$)

10. Generalizando la simetría SU(2) a SU(3), obtenga las funciones de onda del octete simétrico. Discuta la existencia de las partículas Σ^0 y Λ^0, que corresponden a un mismo octete, y tienen los mismos valores de extrañeza S=-1 y componente de isospin I_3=0. ¿En que se diferencian entonces? ¿Como reflejan sus respectivas funciones de SU(3)

esta diferencia? (Sugerencia: recuerde que además de I_3, el otro número cuántico que las caracteriza es el módulo de isospin).

11. A partir de la función de onda de la partícula Λ en las representaciones correspondientes a los octetes simétrico y antisimétrico, las cuales están dadas por

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\text{mixta-anti}} &= \frac{1}{\sqrt{12}}\left(2(ud-du)s+(us-su)d+(sd-ds)u\right)\\
\Phi_{\text{mixta-sim}} &= \frac{1}{2}\left((ds+sd)u-(us+su)d\right)\\
\chi^{\uparrow}_{\text{mixta-anti}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\right)\uparrow\\
\chi^{\uparrow}_{\text{mixta-sim}} &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left((\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow)\uparrow-2\uparrow\uparrow\downarrow\right)
\end{aligned}
$$

calcule el momento magnético anómalo de Λ sabiendo que las masas de los quarks son $m_u = m_d = 360$ MeV, $m_s = 540$ MeV.