Estructura de la Materia 4
Práctica 5b: Teorías de gauge (no abeliano).

Segundo Cuatrimestre 2010

1. Considere la teoría de Yang-Mills, descripta por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = Tr\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right),$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$, siendo A_ν las componentes de un cuadrivecor de matrices de $d \times d$ tales que éstas pertenecen a una representación de un dado grupo de Lie cuyo álgebra tiene D generadores y sus constantes de estructura son f^{abc}; i.e., se tiene $A_\nu = A^a_\nu(x)J^a$, con $[J^a, J^b] = if^{abc}J^c$, y con $A^a_\mu(x)$ funciones reales que conmutan, $a = \{1, 2, 3, ...d\}$. Note que la traza Tr se toma sobre los índices a, b, justamente. Se pide que:

a) Muestre que si se transforma el campo de gauge según

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = \Omega(x)A_\mu(x)\Omega^{-1}(x) - \frac{i}{g}\left(\partial_\mu\Omega(x)\right)\Omega^{-1}(x),$$

dada una transformación arbitraria del grupo $\psi \to \Omega(x)\psi$ con $\Omega(x) = \exp\left(i\omega_a(x)J^a\right)$, entonces el lagrangiano de Yang-Mills permanece invariante.

b) Esto generalizaría la invarianza de gauge de la teoría electromegnética, discuta por qué.

c) Muestre cómo un término de masa para el campo de gauge $A^a_\mu(x)$ rompería dicha invarianza de gauge.

d) Muestre que, a diferencia de la teoría de Maxwell, esta teoría permite la auto-interacción del campo de gauge. Dibuje los diagramas que contribuirían a orden g y g^2 para los scattering de tres y cuatro campos de gauge. Al hacer esto, discuta la dependencia del momento del campo de gauge que aparece en algunos vértices de interacción.

2. Considere el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}_G = \left(\partial_\mu\Phi\right)^\dagger\left(\partial^\mu\Phi\right) - \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$$

donde Φ es un doblete de SU(2) de campos escalares complejos

$$\Phi = \begin{pmatrix}\phi_\alpha \\ \phi_\beta\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4\end{pmatrix}$$

a) Muestre que $\mathcal{L}_G$ is invariante ante transformaciones de fase globales del grupo $SU(2)$

$$\Phi(x) \longrightarrow e^{i\,\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}\Phi(x)$$

b) Muestre que el lagrangiano $\mathcal{L}_L$

$$\mathcal{L}_L = \left(\partial_\mu \Phi + ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{W}_\mu\Phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu \Phi + ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{W}_\mu\Phi\right) - \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 - \frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot\vec{W}^{\mu\nu}$$

que resulta de la sustitución de ∂_μ por la derivada covariante D_μ en $\mathcal{L}_L$ con

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{W}_\mu$$

donde $\vec{W}_\mu(x)$ es un campo de gauge de tres componentes, y del agregado de un término de gauge puro en función del tensor

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{W}_\nu - \partial_\nu\vec{W}_\mu - g\vec{W}_\mu\times\vec{W}_\nu \tag{1}$$

es invariante ante transformaciones infinitesimales

$$\begin{cases} \Phi(x) \to (1 + i\,\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2})\,\Phi(x) & (2)\\ \vec{W}_\mu \to \vec{W}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\vec{\alpha} - \vec{\alpha}\times\vec{W}_\mu & (3)\end{cases}$$

c) Explique porqué los últimos términos de las ecuaciones (1) y (3) están vinculados al carácter no abeliano de SU(2).

3. La simetría SU(3) de sabor es un ejemplo de simetría *global* y puede ser incorporada en el lagrangiano de quarks multiplicando al campo de quarks $\psi(x)$ por un espinor de tres componentes χ_i, tal que se identifican los sabores los sabores u,d, y s con los versores de la base canónica en dicho espacio interno:

$$\chi_u \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \chi_d \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \chi_s \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

De esta forma, para un quark de sabor u el lagrangiano se escribe:

$$\left(\overline{\psi}(x), 0, 0\right)[i\partial\!\!\!/ I - M]\begin{pmatrix}\psi(x)\\0\\0\end{pmatrix} \equiv \overline{\Psi}(x)[i\partial\!\!\!/ I - M]\Psi(x)$$

donde I es la matriz identidad y M es la matriz de masas, que es proporcional a la identidad en el caso en que la simetría es exacta. Una transformación unitaria arbitraria en el espacio SU(3) se puede escribir como

$$\Psi'(x) = U(\epsilon^a)\,\Psi(x) = e^{i\,\epsilon^a\frac{\lambda_a}{2}}\Psi(x) \quad a = 1,\ldots,8$$

donde ϵ^a son ocho parámetros reales que caracterizan la transformación, y λ_a son el análogo de las matrices de Pauli pero para SU(3) (ver práctica 2).

a) Muestre que el lagrangiano es invariante ante una transformación global arbitraria de SU(3) en el caso en que M es proporcional a la identidad, es decir, que para cada sabor, los quarks de distinto color tienen igual masa.
b) Qué puede decir respecto del caso en que ϵ_a son funciones de las coordenadas?

4. Considere el lagrangiano de QCD

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}(x)(i\partial\!\!\!/ I - M)\Psi(x) + g\overline{\Psi}(x)\gamma^\mu T_a \Psi(x) G_\mu^a - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G_a^{\mu\nu}$$

donde $T^a \equiv \frac{\lambda^a}{2}$ y $G^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g\, f_{abc} G^b_\mu G^c_\nu$.
a) Muestre que es invariante ante transformaciones del grupo SU(3) local de color

$$\begin{cases} \Psi(x) \to e^{i\, g\alpha_a(x) T^a}\, \Psi(x) \\ G^a_\mu \to G^a_\mu - \partial_\mu \alpha^a(x) - g\, f_{abc}\alpha^b(x) G^c_\mu \end{cases}$$

b) Expanda el término de gluones $-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G_a^{\mu\nu}$ en el lagrangiano e indentifique los términos del lagrangiano que corresponden a los acoplamientos quark-gluon, y a los de tres y cuatro gluones.
c) Dibuje los cuatro diagramas que, a orden más bajo en la probabilidad, α_s^2, contribuyen al proceso de scattering gluón-gluón, $gg \to gg$.