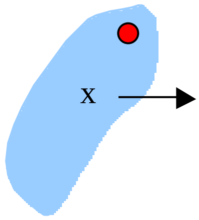
Péndulo físico



Consideraciones generales

En la Figura 1 está representado un péndulo físico, que consiste de un cuerpo de masa m suspendido de un punto de suspensión que dista una distancia d_{cm} de su centro de masa.

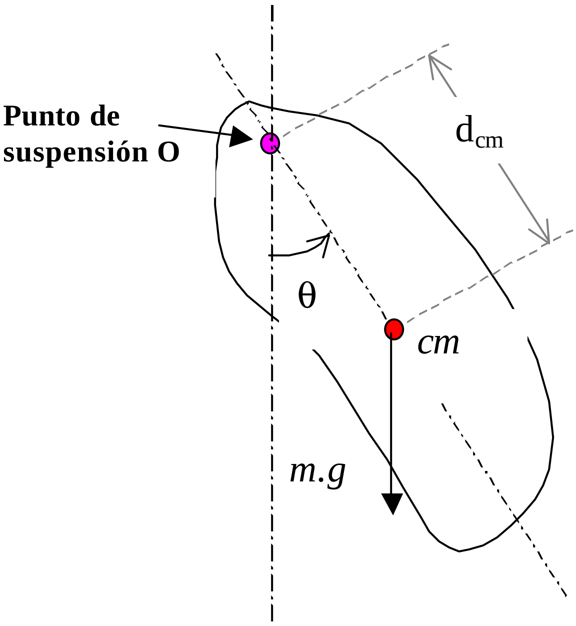


Figura 1: Péndulo físico. *cm* = centro de masa del sistema; $\boldsymbol{d_{cm}}$= distancia del punto de suspensión al centro de masa.

Período para amplitudes de oscilación pequeñas

El período del péndulo físico para pequeñas amplitudes de oscilación está dado por la expresión [1]:

$$T_0 = 2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I}{m_T \cdot g \cdot d_{cm}}} \tag{1}$$

donde I es el momento de inercia de péndulo respecto del centro de rotación (punto de suspensión), m la masa del mismo, g la aceleración de la gravedad del lugar y d_{cm} la distancia del centro demasa del péndulo al centro de rotación.

Período dependiente de la amplitud de oscilación

La expresión (1) es sólo una aproximación, que vale en el límite de amplitudes ($\theta_0 \rightarrow 0$). Para un péndulo fisico (sin roce) pero con amplitud finita, el período del mismo depende de la amplitud de la siguiente manera[2]:

$$T(q_0) = T_0 \cdot \left(\int_{f=0}^{q_0} \frac{df}{\sqrt{k^2 - sen^2(f/2)}} \right) \qquad (2)$$

Donde $k = \text{sen}(q_0/2)$. T_0 es definida por la expresión (1). Para el caso $\text{sen}(q_0/2) = k < 1$, o sea $q_0 < p$, la ecuación (2) tiene la expansión en serie:

$$T(q_0) = T_0 \cdot (1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9 \cdot k^4}{64} + \frac{25 \cdot k^6}{256} + \frac{1225 \cdot k^8}{16384} \cdots), \qquad (3)$$

o bien:

$$T(q_0) = T_0 \cdot (1 + \frac{k^2}{2^2} + \frac{3^2 \cdot k^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{5^2 \cdot k^6}{2^2 \cdot 8^2} + \frac{35^2 \cdot k^8}{2^2 \cdot 64^2} \cdots). \qquad (4)$$

Es posible escribir dos expresiones aproximadas para describir la variación del período con la amplitud[2,3], las que son casi idénticas a la expresión (2) si la amplitud es menor que 90^0.

$$T(q_0) = T_0 \cdot \left(\frac{q_0}{sinq_0} \right)^{3/8}, \quad \text{con} \quad T_0 = T(q = 0^o) \qquad (5)$$

o bien:

$$T(q_0) \approx T_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{q_0}{p_0} \right)^2 \right)^{-\frac{p^2}{16}} \approx T_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{q_0}{4} \right)^2 \right] \qquad (6)$$

Determinación del momento de inercia de un cuerpo usando un péndulo físico.

Según el teorema de los ejes paralelos[1] (teorema de Steiner), el momento de inercia respecto de su centro de masa, I_{cm}, y el momento de inercia respecto de un nuevo eje paralelo al primero y separado de aquel por una distancia y (ver Figuras 1 y 2), están relacionados por:

$$I(y) = I_{cm} + M \cdot y^2 \tag{7}$$

donde M es la masa del cuerpo. Si ponemos al objeto a oscilar alrededor de un punto de suspensión $\boldsymbol{O}$, su período será [ver ec. (1)]:

$$T(y) = 2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I_{cm} + M \cdot y^2}{M \cdot g \cdot y}} \ . \tag{8}$$

La posición del centro de masa del cuerpo puede determinarse con relativa facilidad. Si el objeto es plano, basta suspenderlo de dos puntos cualesquiera y marcar sobre el mismo las direcciones de las verticales que pasan por los puntos de suspensión. La intersección de dichas rectas determina el centro de masa. Esto significa que para un objeto plano el valor de y puede determinarse por medición directa. Si el objeto es simétrico, la simetría indica la ubicación del centro de masa.

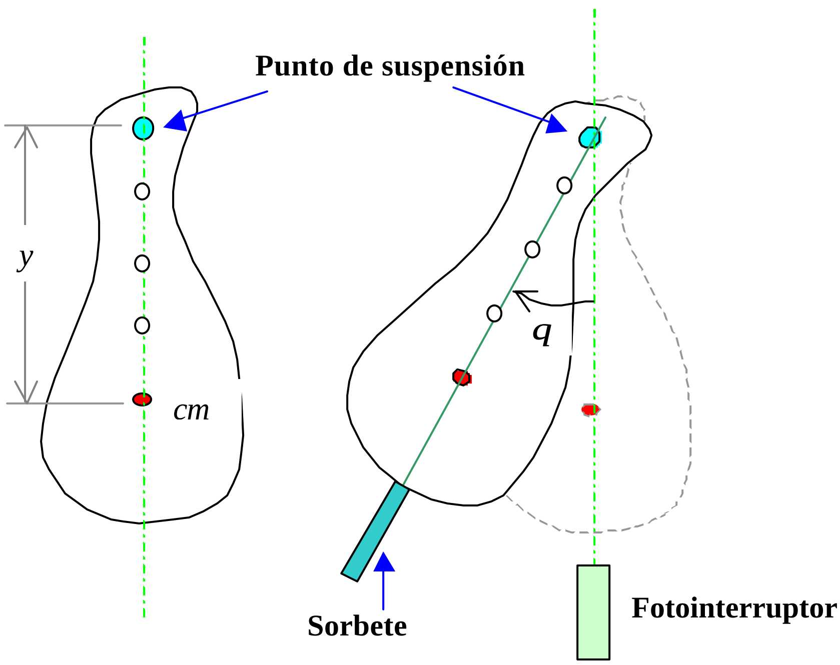


Figura 2: Oscilación de un cuerpo, formando un péndulo físico. En este caso, el punto de suspensión está contenido en el propio cuerpo.

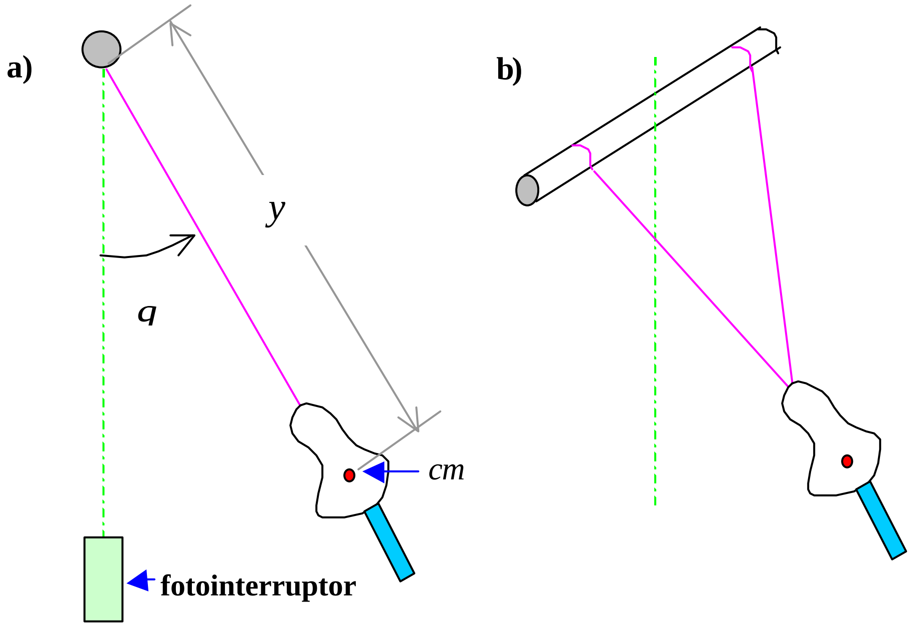


Figura 3: Oscilación de un cuerpo, formando un péndulo físico. En este caso, el punto de suspensión está fuera del cuerpo. a) Vista de frente, b) perspectiva del sistema bifiliar de suspensión.

De este modo, si se cuelga el cuerpo de un hilo bifiliar como se indica en la Figura 3, midiendo el período del péndulo construido con el cuerpo en cuestión y la distancia *y*, usando la expresión (8) podemos determinar el momento de inercia del cuerpo respecto de su centro de masa, I_{cm}. Más específicamente, si definimos las variables:

$$x = \frac{T^2}{4 \cdot p} \cdot M \cdot g \cdot y \tag{9}$$

y

$$l = M \cdot y^2 \tag{10}$$

la expresión (8) se transforma en:

$$x = l + I_{cm}. \tag{11}$$

Por lo tanto midiendo *T(y)*, del gráfico $x\,(l)$ (x versus l.) se puede determinar I_{cm}.

Actividad 1

- Usando un disco metálico o de madera de diámetro entre 20 a 40 cm, con aproximadamente 5 a 10 agujeros de unos 4 a 6 *mm* de diámetro (éstos serán los puntos de suspensión), construir un péndulo similar al indicado en las figuras 2 y 3. Medir el período T para por lo menos 7 distancias y. Representar gráficamente $T(y)$ en función de y, y x en función de l. A partir de estos gráficos determine I_{cm}. Estime el error en esta magnitud por este método.

Nota: En este experimento, el disco puede ser reemplazado por una barra metálica o de madera (de aproximadamente 1*m* de longitud y agujeros para sus suspensión similares al del disco ya mencionado).

- Compare el valor obtenido de I_{cm} con el obtenido de las mediciones directas de la masa del disco y su diámetro. Estime los errores en esta última determinación.

- Compare los valores de I_{cm} obtenidos por los dos métodos anteriores y discuta las ventajas y desventajas de cada método.

Actividad 2

- Determine el momento de inercia de un engranaje u otro objeto de forma irregular construyendo un péndulo físico con el mismo. Determine I_{cm} y estime sus errores.

Ejercicios complementarios.

- Usando las leyes de la dinámica deducir la expresión (1).

- Analice las aproximaciones que realiza para obtener la expresión (1).

- Usando las expresiones (2) a (6) discuta cuáles serán los valores de la amplitud (θ_{max}) para que la expresión sea válida al 1% de precisión. ¿Cuál debería ser la amplitud para que (1) sea válida dentro del 0.1%?

- ¿Con qué precisión debe medirse el período de oscilación para distinguir entre $T(\theta=20°)$ y $T(\theta \to 0°)$?.

Bibliografía

1. *Física para estudiantes de ciencias e ingeniería*, Halliday, Resnick y Krane, 4ta. Ed., Vol. II, Cía. Editorial Continental, S.A. México, (1985).

2. *Simple linearization of the simple pendulum for any amplitude,* M. I. Molina, Phys. Teach. 35, 489 (1997).

3. *The pendulum - rich physics from a simple system*, R. A. Nelson y M. G. Olson, Am. J. Phys. 54, 112 (1986).

4. *Trabajos prácticos de física*, J. E. Fernández y E. Galloni, Editorial Nigar, Buenos Aires (1968).