

TESIS PARA OPTAR AL TITULO
DE DOCTOR EN CIENCIAS FISICOMATEMATICAS DE
JUAN JOSE GIAMBIAGI

PADRINO DE TESIS:

DR. ALBERTO GONZALEZ DOMINGUEZ.

1950

AÑO DEL LIBERTADOR GENERAL SAN MARTIN.



"APLICACION DEL METÓDO DE HADAMARD A

ALGUNOS PROBLEMAS DE FISICAMATEMATICA "

INDICE

Resumen	1
I. Nociones preliminares.....	1
II. Generalidades sobre el Método de Hadamard.....	4
III. Cálculo del potencial electromagnético del electrón.....	12
IV. Cálculo del campo electromagnético.....	22
V. Cálculo del campo electromagnético para un punto de la línea de universo.....	35
VI. Equivalencia entre el " λ limiting process" y el método de Hadamard	26
VII. Cálculo del potencial y del campo ne- sónico.	
VIII. Aplicación a la solución aproximada de la ecuación de Dirac.	

RESUMEN

En los libros de Física aparecen con frecuencia los potenciales de cargas puntuales, conocidos con el nombre de potenciales de Liénard-Wiechert. Generalmente se da de ellos una ^{deducción} ~~relación~~ heurística, a partir de la solución para una distribución continua de cargas. Así lo hace, por ejemplo, Heitler en su libro "Quantum theory of Radiation".

En el presente trabajo se hace una deducción de dichos potenciales usando un método clásico de resolución de ecuaciones diferenciales de tipo hiperbólico.

En lugar de derivar el potencial para obtener el campo, lo que es muy engorroso debido a la aparición de las coordenadas en el tiempo retardado, se vuelve a aplicar el mismo método.

Lo mismo se hace con el potencial y campo mecánico, que satisfacen a la ecuación de Klein-Gordon.

Estos cálculos se hacen primero para un punto que está fuera de la línea de universo de la partícula y luego para un punto de la misma línea, construyendo su equivalencia con el método de Dirac, que consiste en tomar la diferencia de potenciales avanzado y retardado, procedimiento que no es muy justificado todavía.

Se indica finalmente la aplicación a la resolución de la ecuación de Dirac (en primera aproximación) para un electrón en presencia de un campo electromagnético.

El método de Hubbard puede usarse también para obtener

las funciones singulares de tanta aplicación hoy en electrodinámica cuántica. Da, también un método racional para eliminar infinitos que, de otro modo, se suprimen "de facto".

Creo que su aplicación a problemas de "self-energy" puede resultar cómoda para obtener a veces resultados ya conocidos y otras corregir los existentes en este campo donde todo está muy oscuro todavía.

Es un programa de trabajo.

I. NOCIONES PRELIMINARES.

Nos proponemos, en este trabajo, aplicar el método de Haddamard a algunos problemas de interés físico, tales como el campo electromagnético del electrón, el campo mesónico escalar, la fuerza propia sobre el electrón y el mesón, indicándose, finalmente, su aplicación a resolver las ecuaciones de Dirac del electrón en presencia de un campo.

Como en lo que sigue vamos a utilizar a menudo notación tensorial, conviene recordar algunas fórmulas que caracterizan a la métrica lorentziana. En ella, el elemento de longitud se mide por la fórmula cuadrática siguiente:

$$(1) \quad ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Se ve en ella que el tensor fundamental vale:

$$(2) \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si } \mu \neq \nu \quad \begin{matrix} g_{\mu\mu} = -1 & \mu = 1, 2, 3 \\ g_{00} = 1 \end{matrix}$$

Las componentes covariantes son iguales a las contravariantes.

La relación entre la componente covariante con la contravariante de un vector es la siguiente:

$$(3) \quad dx^\mu = \sum_{\nu} g^{\mu\nu} dx_\nu \quad \begin{matrix} dx_\mu & \text{si } \mu = 0 \\ -dx_\mu & \text{si } \mu = 1, 2, 3 \end{matrix}$$

La expresión tensorial de la ecuación de ondas es la siguiente:

$$\square \Phi = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = f$$

Calculados los potenciales de los campos electromagnético y mesónico, los campos se deducen mediante la fórmula siguiente:

$$(4) \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu}$$

Llamaremos Γ al cuadrado de la distancia lorentziana entre dos puntos (x, y, z, t) y $(\xi, \eta, \varsigma, \tau)$. Es decir:

$$(5) \quad \Gamma = (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\varsigma)^2$$

o, lo que es lo mismo:

$$\Gamma = (x-\xi)_i (x-\xi)^i$$

En el curso de nuestro trabajo aparecerá a menudo la derivada de Γ respecto de una componente co- o contravariante. Veamos cómo se calcula

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = (x-\xi)^i + (x-\xi)_\nu \frac{\partial (x-\xi)^\nu}{\partial x_i}$$

pero como

$$(x-\xi)^\nu = g^{\nu j} (x-\xi)_j$$

resulta

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (x-\xi)^\nu = g^{\nu i}$$

y reemplazando:

$$(6) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = (x-f)^i + (x-f)_v g^{vi} = 2(x-f)^i$$

Debemos recordar también algunas propiedades de la travelocidad

$$v_i = \frac{dx_i}{ds}$$

donde $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

$$v^2 = 4 \quad \text{pues} \quad v^2 = \frac{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{ds^2}$$

Derivando, se obtiene

$$(v \dot{v}) = 0$$

derivando nuevamente

$$(v \ddot{v}) + \dot{v}^2 = 0$$

Vamos a llamar en lo que sigue $X(f, y, z, t)$ al punto potenciado y $Z(x, y, z, t)$ al punto fuente.

II. Generalidades sobre el método de Hadamard.

El problema que nos va a interesar a nosotros recibe, en matemáticas, el nombre de problema de Cauchy. Consiste en lo siguiente: dada una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\Phi(u, p, r, s) = 0$$

donde u es la función incógnita, $p = \frac{\partial u}{\partial x_1}$, $r = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $s = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ se busca una solución tal que para $x_n = 0$, u y su derivada normal, $\frac{du}{dn}$ sean funciones dadas de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Las ecuaciones que nos van a interesar particularmente son:

$$\square \Phi = 4\pi J \quad \square \Phi + \mu \Phi = 4\pi J$$

que son ecuaciones de tipo hiperbólico con coeficientes constantes. La primera es la ecuación de las ondas con segundo miembro y la segunda es la ecuación de Klein-Gordon. El operador $\square$ significa

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Las condiciones iniciales se dan en $t = 0$ y son; y su derivada temporal son nulas en todo el espacio para $t = 0$.

Es sabido que el instrumento poderoso para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de se-

Es sabido que el instrumento poderoso para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden es la fórmula de Green.

$$\iiint \left[v L(u) - u M(v) \right] d\Omega = \iiint \left[v \frac{\partial u}{\partial s} - u \frac{\partial v}{\partial s} \right] d\sigma$$

donde $M(v)$ es la forma diferencial adjunta de L y v se elige con una singularidad conveniente en $r=0$ que permita despejar el valor de la función u en el punto deseado.

Por ejemplo, para resolver el problema del potencial (problema de Dirichlet) en el plano, se elige como solución fundamental

$$v = U \log r + \dots$$

donde U es regular y los puntos suspensivos representan también una solución regular.

En el espacio se toma

$$v = \frac{U}{r} + \dots$$

Siempre que se trate de resolver ecuaciones elípticas, el método resulta muy eficaz pues en este caso la superficie característica—es decir, aquella superficie sobre la cual los datos iniciales no determinan unívocamente la solución—se reduce a un punto $r=0$ y, según un teorema de Le Roux y Delassue, cualquier superficie de singularidad de una solución de una ecuación diferencial lineal debe ser una superficie característica. Por lo tanto, la singularidad aparecerá en el caso

elíptico en un solo punto, mientras que en el caso hiperbólico, donde las características son reales, la singularidad aparece en toda una superficie, dando origen a integrales divergentes.

Hadamard, en lugar de seguir el camino de Volterra, de elegir otra solución fundamental, deja las divergencias, recurriendo a un nuevo concepto de integral a fin de darles sentido.

Introdujo primero en integrales simples lo que él llama parte finita de una integral divergente. Este valor lo obtuvo restando a la anterior una expresión infinita en el mismo punto de modo que la diferencia fuera finita, pero demostró que esta diferencia era un valor que dependía de la ^{integral} ~~función~~ misma y no de la función que se le restaba. (Véase 1). El concepto de parte finita resulta muy útil para integrar la ecuación hiperbólica cuando el número de variables que aparecen en la misma es impar. Cuando se trata de integrar una ecuación con un número par de variables, las cosas son un poco distintas y Hadamard empleaba el método de "descent", que consistía en plantear la ecuación para una variable más, aplicar el método de la parte finita y suponer luego que la solución no dependía de una de las variables. En estos casos es más útil el concepto introducido por K. Friedrichs, de parte finita logarítmica de una integral divergente. (Véase 2)

Vamos a hacer un resumen explicando en qué consiste el método. Puede leerse con gran provecho 3.

El método se basa en la aplicación de la fórmula de Green a un adecuado recinto tetradimensional. Como se demuestra que el campo en un punto sólo depende de los datos sobre la intersección de una superficie espacial con el cono tetradimensional, se sugiere elegir como dominio de aplicación de la fórmula de Green, al cono tetradimensional, limitado por la superficie donde se dan los datos iniciales.

Vamos a llamar G al interior del cono, B a la base y H a la superficie lateral. La expresión a integrar es la siguiente:

$$L(u) = \sum_{i,k} a_{ik} u_{ik} + \sum_i b_i u_i + cu = f$$

La fórmula de Green dice:

$$(1) \iiint \left[v L(u) - u M(v) \right] d\Omega = \iint_H \left[v \left[\sum_k \left(a_{ik} u_k - u \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ik} v) + b_i u v \right) \right] \frac{\partial x_i}{\partial v} \right] d\sigma$$

donde $M(v)$ es la forma diferencial adjunta de $L(u)$.

Es decir,

$$M(v) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (a_{ik} v) - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i v) + cv$$

Si se cumple la condición

$$b_i = \sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}$$

la expresión diferencial se llama autoadjunta. Este caso nos va a interesar particularmente a nosotros. Además se cumple que los coeficientes son constantes. Para simplificar la notación los elegiremos iguales a uno.

En este caso, la fórmula de Green queda:

$$\iiint \left[vL(u) - uL(v) \right] d\Omega - \iiint \left(v \frac{\partial u}{\partial s} - u \frac{\partial v}{\partial s} \right) d\sigma = 0$$

donde $\frac{\partial}{\partial s}$ es la derivada según la dirección "conormal", según la denominación de Adhemar. Véase 4, páginas 246 y 264.

Se presenta ahora el problema de elegir una solución fundamental adecuada. Las soluciones fundamentales que usaremos nosotros satisfarán a la ecuación siguiente:

$$(2) \quad L(u) = u_{tt} - \Delta u - Cu = 0$$

Buscamos una solución v que sólo dependa de r .
Obtenemos reemplazando

$$v'' + \frac{m}{r} v' - Cv = 0$$

La solución se obtiene fácilmente por recurrencia si observamos que siendo v solución para el valor m , resulta

$$w = \frac{v'}{r}$$

una solución de la ecuación con $m+2$, en lugar de m .

Para $m = 0$ tenemos como soluciones de nuestra ecuación

$$v = \sinh \sqrt{c} r \quad \text{o} \quad v = \cosh \sqrt{c} r \quad \text{y para } m = 1 \quad v = J_0(\sqrt{-c} r)$$

$$v = N_0 \sqrt{-c} r \quad \text{donde}$$

$$N_0(\sqrt{-c} r) = \frac{1}{n} J_0(\sqrt{-c} r) \log r + R$$

$R =$ función regular

es la función de Neumann de orden cero. Para $m = 2$ obtenemos por el método de recurrencia mencionado

$$v = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \cosh \sqrt{c} r$$

que es singular en el cono. Obsérvese que m es el número de variables espaciales que aparecen en la ecuación. En el espacio físico el número de variables espaciales es tres. Para este caso tenemos:

$$(3) \quad v = \frac{J_0 \sqrt{-c} r}{r} + \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{r}} J_0'(\sqrt{-c} r) \log r + \text{funciones regulares}$$

donde

$$J_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{c}{4}\right)^{\nu} \frac{r^{\nu}}{\nu! 2} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{-c}{r}} J_0'(\sqrt{-c} r)$$

son funciones regulares en todo el espacio. En general, tendremos, para un número impar de dimensiones (espaciales y el tiempo)

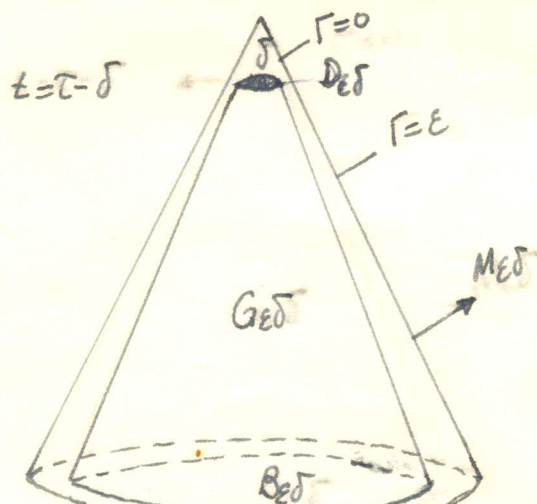
$$(4) \quad v = \frac{U}{r^{\frac{n-2}{2}}}$$

y para un número par

$$v = \frac{U}{r^{\frac{n-2}{2}}} + W \log r$$

donde U y W son funciones regulares y además $L(W) = 0$.

Cuando aplicamos la fórmula de Green al recinto limitado por el cono $\Gamma = 0$, eligiendo la solución fundamental (4) o la (5), según el caso, las integrales que aparecen son todas divergentes. En lugar de aplicar dicha fórmula al cono $\Gamma = 0$, lo hacemos al interior del hiperboloides cortado cerca del vértice por el hiperplano $t = \tau - \delta$, como ilustra la figura. La ecuación del hiperboloides es $\Gamma = \epsilon$. Si el número de variables que aparecen en la ecuación es un número par, se demuestra que cada una de las integrales admite un desarrollo en serie de la forma siguiente:



$$B(\epsilon) = b + \frac{1}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} \left(b_0 + \dots + b_{\frac{n-2}{2}} \epsilon^{\frac{n-2}{2}} \right) + o(\epsilon)$$

donde $\epsilon \rightarrow 0$ y $b_0, b_1, \dots$

no dependen de ϵ . Cuando

$\epsilon \rightarrow 0$ esta expresión diverge. Llamemos a $b = \mathcal{B}(\epsilon)$ la parte finita de $B(\epsilon)$. Para un número impar de variables, esta parte finita tiene la propiedad de ser invariante frente a transformaciones del parámetro. Ello se debe al exponente semientero que aparece en el denominador, que impide que aparezca alguna parte finita en el paréntesis. La fórmula de Green, aplicada a $G_{\epsilon\delta}$ da una ecuación de la

forma siguiente:

$$\sum_k B^k(\varepsilon) = \sum_k b_k + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} \left(\sum_k b_0^k + \varepsilon \sum_k b_1^k + \dots \right) = 0$$

Como esta igualdad se verifica para todo ε , resulta:

$$\sum_k b_k = 0$$

es decir, la suma de las partes finitas de las integrales divergentes es nula. Esta relación permite obtener el valor de u en función de los datos.

En caso que el número de variables sea par, se demuestra que cada una de las integrales que aparece tiene la forma

$$B(\varepsilon) = \alpha \log \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} \left(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \dots + \alpha_{\frac{n-2}{2}} \varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \right) + (\varepsilon)$$

pero como ahora, n , que es el número total de variables, es par, la parte finita no es más invariante frente a transformaciones del parámetro. Véase 3. En cambio, sí lo es el coeficiente de $\log \varepsilon$, que se llama la parte finita logarítmica. La fórmula de Green nos dará entonces el resultado siguiente:

$$\sum_k \alpha_k = 0$$

Es decir, la forma de trabajar será la siguiente:

Calculamos cada integral que aparece en la fórmula de Green, separando el coeficiente que multiplica al logaritmo del parámetro. Luego sumamos todas las partes finitas logarítmicas y las igualamos a cero. Ello nos permitirá despejar la función incógnita.

III. CALCULO DEL POTENCIAL ELECTROMAGNETICO DEL ELECTRON

En el estudio del campo electromagnético, la teoría de la Relatividad introduce un tetravector potencial cuyas componentes Φ_i satisfacen a la ecuación siguiente:

$$\square \Phi_i = 4\pi J_i$$

donde J_i es el vector densidad de corriente. Es decir, ρ_0 densidad de carga en el sistema propio multiplicada por la tetra-velocidad $\frac{dx_i}{ds}$, donde s es el tiempo propio ligado a t por la relación siguiente:

$$ds = dt \sqrt{1 - \beta^2}$$

A fin de simplificar las fórmulas, tomamos la velocidad de la luz en el vacío igual a uno.

Calculamos primeramente el potencial en un punto que esté fuera de la línea de universo del electrón. Vamos a considerar el volumen tetradimensional limitado por el hiperboloides $\tau = \varepsilon$, el hiperplano $\tau = \bar{\tau} - \delta$ y el hiperplano en el infinito. Las condiciones iniciales en el infinito son:

$$\Phi = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

La fórmula de Green aplicada a ese volumen nos dice entonces:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \iiint_{G_{\mathcal{E}\mathcal{O}}} V 4\pi J_i dx dy dz dt = \\
 & = \iiint_{M_{\mathcal{E}\mathcal{O}}} \left[V \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \Phi_i \frac{\partial V}{\partial s} \right] d\sigma + \iiint_{D_{\mathcal{E}\mathcal{O}}} \left[V \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial V}{\partial t} \right] dx dy dz
 \end{aligned}$$

donde V es la solución fundamental de Hadamard:

$$V = \frac{U}{r^{\frac{n-2}{2}}} + W \log r$$

y donde, por las condiciones iniciales (1) hemos suprimido la integral extendida a la base del cono. U y W indican funciones regulares, cumpliéndose además $\square W = 0$.

$\square$ significa derivada según la conormal que, en este caso es la simétrica de la normal al cono respecto al eje temporal, y viene dada por:

$$\frac{\partial}{\partial s} = t_v \frac{\partial}{\partial t} - x_v \frac{\partial}{\partial x_v} - y_v \frac{\partial}{\partial y} - z_v \frac{\partial}{\partial z}$$

Como la superficie del cono es una superficie característica, la dirección conormal está en el plano tangente y coincide con la bi-característica que pasa por ese punto. Véase I. página 63.

U es igual, según II (3) a la función $J_0(\sqrt{-\epsilon} r)$ y

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{F}} J_0(\sqrt{F} r)$$

donde c es la constante que aparece en la ecuación de ondas amortiguadas

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} - \Phi_{yy} - \Phi_{zz} - c\Phi = f(x, y, z, t)$$

En el caso que nos interesa, campo electromagnético en el vacío $c=0$ y, por lo tanto, $W=0$ y $U=1$. Nos queda, en definitiva:

$$(3) \quad V = \frac{1}{r}$$

tender
 ϵ

El procedimiento consiste, como ya dijimos, en hacer ϵ a cero y quedarnos con la parte finita logarítmica de cada integral.

El ingeniero Calderón demostró que el mismo resultado se obtiene tomando como recinto de integración el hiperboloide $r=\epsilon$ y haciendo tender $\epsilon \rightarrow 0$ sin necesidad de cortar con el hiperplano $t=\bar{t}-\delta$.

Vamos a calcular la parte finita de la integral sobre $A_{\epsilon 0}$ sin poner $W=0$ porque el resultado nos servirá para el campo mecánico especial. Tendremos:

$$\begin{aligned} & \int_{M_{\epsilon 0}} \left[V \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \Phi_i \frac{\partial V}{\partial s} \right] d\sigma \\ & \int_{M_{\epsilon 0}} \left[\left(\frac{V}{r} + W \log r \right) \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \Phi_i \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V}{r} + W \log r \right) \right] d\sigma \end{aligned}$$

Donde los asteriscos indican parte finita logarítmica. Como Γ es constante en el integrando, es igual a ε , queda como parte finita logarítmica:

$$\iiint_{M \in \delta} \left[w \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \Phi_i \frac{\partial w}{\partial s} \right] d\sigma$$

Cuando δ tiende a cero, esto tiende a la integral en la superficie lateral del cono.

Esta integral se transforma mediante la fórmula de Green, teniendo en cuenta que Φ satisface a la ecuación homogénea, de la siguiente manera:

$$(4) \quad \iiint_M \left[w \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \Phi \frac{\partial w}{\partial s} \right] d\sigma = \iiint_G w 4\pi J \, dx dy dz dt.$$

La integral en el hiperplano del infinito desaparece por las condiciones supuestas en el mismo. En el caso de la ecuación de ondas no amortiguadas, que es la que nos interesa ahora, la parte finita logarítmica es nula, pues lo es Φ . En cambio, en la ecuación de Klein-Gordon, la tendremos que tomar en cuenta, pues Φ no se anula.

Vamos a mostrar ahora que la parte finita logarítmica sobre D es $-2\pi \Phi_i$.

Haremos el cálculo para el caso general, poniendo U y W . En efecto, escrita explícitamente, dicha integral es:

$$I_{\varepsilon\delta} = \iiint_{D_{\varepsilon\delta}} \left[\frac{U\Phi_t - \Phi U_t}{\Gamma} + \frac{\Phi U_t}{\Gamma^2} - \frac{\Phi W_t}{\Gamma} \right] dx dy dz$$

$$+ \iiint_{D_{\varepsilon\delta}} \log \Gamma (W\Phi_t - \Phi W_t) dx dy dz$$

como la última integral es convergente, queda:

$$I_{\varepsilon\delta} = \iiint \left(\frac{U\Phi_t - \Phi U_t}{\Gamma} + \frac{\Phi U_t}{\Gamma^2} - \frac{\Phi W_t}{\Gamma} \right) dx dy dz$$

Sumamos y restamos ahora las siguientes integrales

$$\iiint_{D_{\varepsilon\delta}} \left(\frac{\bar{U}\bar{\Phi}_t - \bar{\Phi}\bar{U}_t}{\Gamma} \right) dx dy dz; \iiint_{D_{\varepsilon\delta}} \frac{\Phi W_t}{\Gamma} d\sigma; \iiint_{D_{\varepsilon\delta}} \sigma \mu (\overline{\Phi U}) d\sigma$$

(*) Donde σ, μ son nuevas variables que se introducen con el siguiente cambio;

$$\begin{aligned} x &= \xi + \sigma(1-\mu)\alpha \\ y &= \eta + \sigma(1-\mu)\beta \\ z &= \zeta + \sigma(1-\mu)\gamma \\ t &= \tau - \sigma \end{aligned} \quad \Gamma = \sigma^{2-\mu}(2-\mu)$$

α, β, γ

son cosenos directores y $D_{\varepsilon\delta}$ se define por $\sigma = \delta$ y por la desigualdad $\delta^2 \mu(2-\mu) \leq \varepsilon$. El borde corresponde al signo igual. $\delta^2 \mu(2-\mu) = \varepsilon; 2\delta^2 \mu - \delta^2 \mu^2 = \varepsilon$. Como δ es arbitrariamente pequeño, despreciamos el cuadrado y ponemos

$2\delta^2 \mu = \varepsilon \quad \mu = \frac{\varepsilon}{2\delta^2}$. Las siguientes integrales convergen:

(*) La raya indica que se debe tomar el valor en aquel punto de la superficie lateral del cono cortado por el rayo que sale del eje del cono y pasa por x, y, z, t . $\overline{\Phi U}$ es la derivada según la normal.

$$\iiint_{D_{\varepsilon\delta}} \frac{\Phi_t U - \Phi U_t - (\bar{U} \bar{\Phi}_t - \bar{\Phi} \bar{U}_t)}{\Gamma} d\omega; \quad \iiint_{D_{\varepsilon\delta}} \frac{(\Phi W - \bar{\Phi} \bar{W}) \Gamma_t}{\Gamma} d\omega$$

$$\iiint_{D_{\varepsilon\delta}} \frac{\Gamma_t}{\Gamma^2} \left(\Phi U - \bar{\Phi} \bar{U} + \sigma \kappa (\Phi U)_\nu \right) d\omega$$

Queda, por lo tanto, como parte finita logarítmica

$$I_{\varepsilon\delta} = \iiint \left[\frac{(\bar{\Phi}_t \bar{U} - \bar{\Phi} \bar{U}_t)}{\Gamma} - \frac{\bar{\Phi} \bar{W} \Gamma_t}{\Gamma} + \frac{\bar{\Phi} \bar{U} - \delta \kappa (\Phi U)_\nu \Gamma_t}{\Gamma^2} \right] d\omega$$

Observando que

$$\Gamma = \delta^2 \kappa (2 - \kappa); \quad \Gamma_t = -2\sigma; \quad d\omega = \delta^3 (1 - \kappa)^2 d\omega d\kappa$$

donde $d\omega$ indica el ángulo cónico. Se obtiene:

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon\delta} = & \delta \iint_{B_\sigma} (\bar{\Phi}_t \bar{U} - \bar{\Phi} \bar{U}_t) d\omega \int_{\varepsilon/2\delta^2}^1 \frac{(1-\kappa)^2}{\kappa(2-\kappa)} d\kappa + \delta^2 \iint_{B_\sigma} \bar{\Phi} \bar{W} d\omega \int_{\varepsilon/2\delta^2}^1 \frac{2(1-\kappa)^2}{\kappa(2-\kappa)} d\kappa \\ & - \iint_{B_\sigma} \bar{\Phi} \bar{U} d\omega \int_{\varepsilon/2\delta^2}^1 \frac{2(1-\kappa)^2}{\kappa^2(2-\kappa)^2} d\kappa + \delta \iint_{B_\sigma} (\Phi U)_\nu d\omega \int_{\varepsilon/2\delta^2}^1 \frac{2(1-\kappa)^2}{\kappa(2-\kappa)^2} d\kappa. \end{aligned}$$

Calculando la integral respecto de κ :

$$I_{\varepsilon\delta} = -\frac{1}{2} \iint_{B_\sigma} \left\{ \bar{\Phi} \bar{U} + \delta (\bar{\Phi}_t \bar{U} - \bar{\Phi} \bar{U}_t + (\Phi U)_\nu) + 2\delta^2 \bar{\Phi} \bar{W} \right\} d\omega$$

haciendo tender a cero, se obtiene, finalmente:

$$(5) \quad I = -2\pi \Phi(s, \eta, s, \tau)$$

La fórmula (2) se reduce, teniendo en cuenta (3), (4) y (5) a la siguiente:

$$(5') \quad \Phi_i = -\frac{1}{2\pi} \iiint_V 4\pi J_i dx dy dz dt = -2 \iiint \frac{J_i}{F} dQ$$

Si se trata de un electrón puntual, esta integral se convierte en una a lo largo de la línea de universo del electrón

$$(6) \quad \Phi_i = -2e \int_{-\infty}^{S_\epsilon} \frac{u_i}{r} ds$$

Esta integral se puede obtener a partir de la anterior representando la tetracorrente por medio de un núcleo singular y pasando al límite. Es más sencillo, aunque no riguroso, poner para J_i la representación siguiente:

$$J_i = e \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x(s)) \delta(y-y(s)) \delta(z-z(s)) \delta(t-t(s)) \left(\frac{u_i(s)}{V_i(s)} \right) ds$$

Si se invierte el orden de integración y se aplican las propiedades de la función δ de Dirac a la (5'), se obtiene la (6). En esta, u_i es la tetra-velocidad del electrón, de módulo uno y s es la intersección de la línea de universo del electrón con el hiperboloide $r = \epsilon$.

En la (6) vamos a tomar como variable de integración

en lugar de ε , tendremos:

$$r = (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2$$

$$\frac{dr}{ds} = 2 \left[(t-\tau) \frac{dt}{ds} - (x-\xi) \frac{dx}{ds} - (y-\eta) \frac{dy}{ds} - (z-\zeta) \frac{dz}{ds} \right]$$

Recordando que

$$\vec{r} = (x - z)$$

resulta:

$$(7) \quad \frac{dr}{ds} = -2(\vec{r}, \vec{u})$$

Si la velocidad del electrón es menor que una constante menor que la velocidad de la luz, resulta que cuando $S \rightarrow \infty$ $r \rightarrow \infty$. El otro límite es ε . Queda, teniendo en cuenta la

(7):

$$(8) \quad \Phi_i = -2e \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{u_i}{r} \frac{ds}{d\tau} d\tau = -e \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{u_i}{r(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d\tau}{ds} = e \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{u_i(\tau)}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d\tau}{r}$$

Con la hipótesis hecha acerca de la velocidad de electrón, la siguiente integral resulta convergente

$$\int_{-\infty}^A \frac{u_i}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d\tau}{r}$$

donde A es un número positivo cualquiera. Para demostrar esta afirmación vamos a considerar el caso más desfavorable en que el electrón se mueve con velocidad A menor

menor que uno (recuérdese que hemos tomado la velocidad de la luz igual a uno). Supongamos que el electrón, en su historia pasada, ha estado en el punto potenciado en un tiempo que, sin pérdida de generalidad podemos elegir ce no cero. En este caso, tendremos:

$$\sqrt{r} = \vec{r} = \sqrt{r_0^2 - (r')^2} \quad \text{donde} \quad r' = \sqrt{(x-s)^2 + (y-\eta)^2 + (z-s)^2}$$

Por lo tanto,

$$r_0 u_0 - r_1 u_1 - r_2 u_2 - r_3 u_3 = \frac{r_0}{\sqrt{1-A^2}} - \frac{|r|A}{\sqrt{1-A^2}}$$

Donde hemos tenido en cuenta que

$$ds = dt \sqrt{1-A^2}; \quad \frac{dz'_i}{ds} = \frac{dz'_i}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dz'_i}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-A^2}}; \quad \left[\sum_i \left(\frac{dz'_i}{ds} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{A}{\sqrt{1-A^2}}$$

reemplazando la expresión anterior de r' y poniendo $t = r_0 + \tau$, resulta:

$$(\vec{r}, \vec{u}) = \frac{r_0}{\sqrt{1-A^2}} - \frac{A^2 \tau}{\sqrt{1-A^2}} = \frac{r_0 - A^2 r_0 - A^2 \tau}{\sqrt{1-A^2}} = r_0 \frac{(1-A^2)}{\sqrt{1-A^2}} - \frac{A^2 \tau}{\sqrt{1-A^2}}$$

Si A es menor que uno, este producto tiende a infinito como $\sqrt{r}$. Es decir, que el integrando que aparece en la integral en discusión tiende a cero como $r^{3/2}$. Con esto hemos demostrado que la integral es convergente. Si el electrón no hubiera pasado por el punto potenciado, el razonamiento que hay que hacer es prácticamente el mismo.

Descomponemos ahora la integral (6) en suma de dos integrales: de infinito a A y de A a ∞ . Como la primera es

convergente, no contribuye a la parte finita logarítmica. Podemos, por lo tanto, escribir:

$$(9) \quad \Phi_i = e \int_A^{\epsilon} \frac{\mu_i}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d\Gamma}{\Gamma}$$

A este integral vamos a sumarle y restarle la siguiente:

$$e \int_A^{\epsilon} \left\{ \frac{\mu_i}{(\vec{r}, \vec{u})_0} \right\} \frac{d\Gamma}{\Gamma}$$

donde el subíndice cero indica que tomamos el valor en el tiempo retardado.

La (9) queda:

$$\Phi_i = e \int_A^{\epsilon} \left\{ \frac{\mu_i}{(\vec{r}, \vec{u})_0} \right\} \frac{d\Gamma}{\Gamma} + \int_A^{\epsilon} \left[\frac{\mu_i}{(\vec{r}, \vec{u})} - \left\{ \frac{\mu_i}{(\vec{r}, \vec{u})_0} \right\} \right] \frac{d\Gamma}{\Gamma}$$

El segundo término del segundo miembro da una integral convergente y no contribuye, por lo tanto, a la parte finita logarítmica. queda sólo el primero

$$\Phi_i = e \int_A^{\epsilon} \left\{ \frac{\mu_i}{(\vec{r}, \vec{u})_0} \right\} \frac{d\Gamma}{\Gamma} = e \left\{ \frac{\mu_i}{(\vec{r}, \vec{u})_0} \right\}$$

En definitiva

$$(10) \quad \Phi_i = e \left\{ \frac{\mu_i}{(\vec{r}, \vec{u})_0} \right\}$$

Estos son los potenciales de Liénard-Wiechert.

IV. CALCULO DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO

Usando notación tensorial, tendremos:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu}$$

El campo se podría obtener derivando directamente la expresión del potencial, pero como aparecen en el tiempo retardado las coordenadas del punto potenciado, las derivaciones son muy complicadas. Véase, por ejemplo, en "quantum theory of radiation", pág. 21. Heitler. Es mucho más sencillo repetir el mismo razonamiento hecho para calcular el potencial.

Partimos de la expresión del potencial dada por la fórmula (8) III

$$\Phi_i = -2e \int_{-\infty}^{S_e} \frac{u_\nu(Q)}{r} ds$$

Para derivar la parte finita logarítmica de una integral divergente se deriva directamente bajo el signo de integral. Véase 5, pág. 492.

Tendremos:

$$F_{\mu\nu} = -2e \int_{-\infty}^{S_e} \left[u_\nu(Q) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{1}{r} \right) - u_\mu(Q) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds$$

$$F_{\mu\nu} = 2e \int_{-\infty}^{S_E} \left[\frac{\mu_\nu \Gamma_\mu - \mu_\mu \Gamma_\nu}{\Gamma^2} \right] ds$$

según la fórmula 6 I, resulta:

$$\Gamma_\mu = 2(x - s)_\mu = 2r_\mu$$

reemplazando, se obtiene:

$$F_{\mu\nu} = 4e \int_{-\infty}^{S_E} \frac{[\vec{r}, \vec{a}]_{\mu\nu}}{\Gamma^2} ds$$

donde

$$[\vec{r}, \vec{a}] = [\Gamma_\mu \mu_\nu - \Gamma_\nu \mu_\mu]$$

Tomemos a Γ como variable de integración e integremos por partes, obtenemos:

$$F = 4e \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{[\vec{r}, \vec{a}]}{\Gamma^2} \frac{ds}{d\Gamma} d\Gamma = -2e \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{[\vec{r}, \vec{a}]}{(\vec{r}, \vec{a}) \Gamma^2} d\Gamma = -2e \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{[\vec{r}, \vec{a}]}{(\vec{r}, \vec{a}) \Gamma^2} d\Gamma$$

La integral $\int_{-\infty}^{\infty}$ no nos interesa porque es convergente. Integrando nuevamente por partes:

$$F = 2e \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \left[\frac{1}{r} \right]_A^\varepsilon - 2e \int_A^\varepsilon \frac{d}{d\tau} \left(\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right) \frac{d\tau}{r}$$

El primer término no contribuye a la parte finita log. porque es un infinito de orden $\frac{1}{\varepsilon}$. En cuanto al segundo, procediendo análogamente a como hicimos en el caso del potencial (sumando y restando una integral convenientemente elegida), da:

$$F = -2e \left\{ \frac{d}{d\tau} \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}_0 = -2e \left\{ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right) \right\}_0 \left(\frac{d\tau}{d\tau} \right)_0$$

$$(2) \quad F = e \left\{ \frac{1}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right) \right\}_0$$

Este resultado coincide con el ya obtenido por Fremberg y por Sommerfeld. El primero mediante el método de prolongación analítica de Marcel Riesz y el segundo por integración en el campo complejo. Véase 6.

Esta fórmula nos da el campo en un punto que esté fuera de la línea de universo del electrón. En la misma línea el resultado es divergente.

V. CALCULO DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO EN UN PUNTO DE LA LINEA DE UNIVERSO.

La fórmula (1) IV nos da el campo del electrón. Vamos a calcular la parte finita logarítmica de esta expresión cuando el punto potenciado está en la misma línea de universo. Partimos, pues, de

$$F = 4e \int_{-A}^{S_E} \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{r^2} ds$$

Como la integral $\int_{-\infty}^{S_E}$ es convergente, ponemos directamente:

Recordemos que el límite superior es el valor del tiempo propio que corresponde a la intersección con el cono $r = \xi$.

Desarrollemos el integrando en serie a partir del punto potenciado. Tomemos, para simplificar $s = 0$ en ese punto. Tendremos:

$$[\vec{r}, \vec{u}] = -\frac{s^2}{2} \left\{ [\vec{u}, \vec{u}] - \frac{2}{3} [\vec{u}, \vec{u}] s + \dots \right\}$$

donde hemos usado

$$\vec{r} = -u_0 s - \dot{u}_0 \frac{s^2}{2} - \ddot{u}_0 \frac{s^3}{6} + O(s^4)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \dot{\vec{u}}_0 s + \ddot{\vec{u}}_0 \frac{s^2}{2} + O(s^3)$$

$$r = r^{1/2} = -s + O(s^3)$$

En el límite superior, como s es un infinitésimo, podemos poner, teniendo en cuenta la última igualdad, $S_e = -\varepsilon^{1/2}$.

Reemplazamos ahora en la integral todos los desarrollos en serie y calculamos la parte finita logarítmica. Resulta:

$$F = 4e \int_{-\infty}^{S_e} \left\{ \frac{s^2}{2} [\ddot{u}, \ddot{u}] - \frac{2}{3} [\ddot{u}, \ddot{u}] s + O(s^3) \right\} \frac{ds}{r^2} = \frac{4}{3} \int_{-A}^{-\sqrt{\varepsilon}} [\ddot{u}, \ddot{u}] \frac{ds}{s}$$

Si ahora sumamos y restamos

$$\frac{4}{3} e \int_{-A}^{-\sqrt{\varepsilon}} [\ddot{u}, \ddot{u}] \frac{ds}{s}$$

obtenemos:

$$F = \frac{4}{3} e \int_{-A}^{-\sqrt{\varepsilon}} [\ddot{u}, \ddot{u}] \frac{ds}{s} + \frac{4}{3} e \int_{-A}^{-\sqrt{\varepsilon}} \{ [\ddot{u}, \ddot{u}] - [\ddot{u}, \ddot{u}] \} \frac{ds}{s}$$

Como la segunda integral es convergente, no contribuye a la p.f. l. queda finalmente:

$$(1) \quad F = \frac{4}{3} e \int_{-A}^{-\sqrt{\varepsilon}} [\ddot{u}, \ddot{u}] \frac{ds}{s} = \frac{2e}{3} [\ddot{u}, \ddot{u}]_0$$

Con esta expresión del campo para un punto de la línea de universo, obtenemos para la fuerza de Lorentz la expresión siguiente:

$$f^{\mu} = F^{\mu\sigma} e u_{\sigma} = \frac{2e^2}{3} (\dot{u}^{\mu} + \dot{u}^2 u^{\mu})$$

Estas ecuaciones fueron deducidas por Dirac 7, tomando la diferencia de los potenciales avanzado y retardado, y posteriormente por Frenberg, 6. Este último mediante el método de prolongación analítica de Marcel Riesz.

VI. EQUIVALENCIA ENTRE EL " λ LIMITING PROCESS" Y LA PARTE FINITA LOGARITMICA

Vamos a seguir aquí el mismo razonamiento hecho por Ma para demostrar la equivalencia del λ limiting process con el método de Riesz, señalando en cada caso las ventajas que puede aportar el uso del método de Hadamard. Ya vimos que el potencial viene dado por la fórmula siguiente:

$$(1) \quad \Phi_i = -2e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_i}{r} ds$$

que es la correspondiente a la (2) del trabajo de Ma. Si ahora cambiamos variable, tendremos:

$$\Phi_i = -2e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_i}{r} \frac{ds}{d\tau} d\tau \quad \text{pero} \quad \frac{ds}{d\tau} = - \frac{1}{2(\vec{r}, \vec{u})}$$

de modo que

$$(2) \quad \Phi_i = e \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_i}{(\vec{r}, \vec{u})} \right) \frac{d\tau}{r}$$

que es la misma fórmula (8) del trabajo citado, donde $\frac{u_i}{(\vec{r}, \vec{u})}$ es lo que Ma llama A_{ret} , pero en este caso, la deducción de la fórmula (2) a partir de la (1) es mucho más sencilla que la hecha por Ma con las fórmulas (10), (11) y (12).

Lo mismo sucede con la fórmula (14). Teniendo en cuen-

ta que en el integrando de (2), lo único que depende de las coordenadas del punto ^{potenciado} es el factor , resulta:

$$(3) \quad F = e \int_{-\infty}^{\infty} F^{ret} \frac{d\Gamma}{\Gamma}$$

donde hemos tenido en cuenta el resultado ya mencionado de que la derivada de la p.f. l. se obtiene derivando directamente bajo el signo de integral.

Partiendo de la fórmula (1) vamos a calcular el valor del potencial en la línea de universo. Desarrollemos u_i y Γ en el entorno del punto potenciado que, por comodidad, hacemos corresponder, igual que antes, con el origen de los valores del parámetro. Haciendo $\sigma = S_0 - S$ resulta:

$$(4) \quad u_i = u_{i,0} - \left(\frac{du_i}{ds} \right)_0 \sigma + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 u_i}{ds^2} \right)_0 \sigma^2 + \dots$$

$$(5) \quad \Gamma^{1/2} = \sigma \left\{ 1 - \frac{1}{24} \left(\frac{du}{ds} \right)_0^2 \sigma^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{du}{ds}, \frac{d^2 u}{ds^2} \right)_0 \sigma^3 + \dots \right\}$$

$$(6) \quad \Gamma = \sigma^{-2} \left\{ 1 + \frac{2}{24} \left(\frac{du}{ds} \right)_0^2 \sigma^2 - \frac{2}{24} \left(\frac{du}{ds}, \frac{d^2 u}{ds^2} \right)_0 \sigma^3 + \dots \right\}$$

La (1) queda, teniendo en cuenta esta última igualdad:

$$\Phi_i = -2 \int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} e \frac{u_i}{\Gamma} ds$$

Reemplazando aquí los desarrollos en serie (4) y (5), se obtiene:

$$(7) \quad \Phi_i = - \left(\frac{du}{ds} \right)_o$$

vamos a ver en el párrafo siguiente que esto corresponde a la semidiferencia del potencial avanzado y retardado.

Prueba general de la equivalencia de los dos métodos

Ma calcula primero el campo en el punto contemporáneo al punto potenciado y situado a una distancia hiperbólica. Veamos primeramente qué es el punto contemporáneo X a uno dado Z de la línea de universo.

Punto contemporáneo es aquél que satisface a la relación siguiente:

$$(\vec{V}_i, \vec{\mathcal{E}}) = 0$$

donde

$$\vec{\mathcal{E}} = (\vec{X}_i - \vec{Z})$$

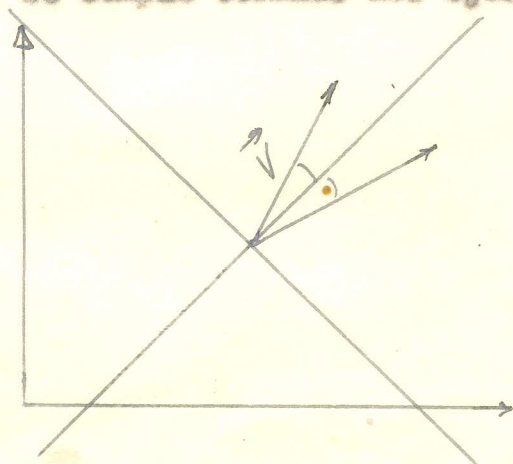
es decir, ortogonal al vector tetra-velocidad en ese punto. La ortogonalidad, en una métrica hiperbólica significa simetría respecto al cono de luz. Por ejemplo, los vectores que están en el cono son ortogonales a sí mismos. Sin dar una demostración general, podemos ver que ello se cumple tomando dos ejes x, t . V es un vector temporal,

es decir, cumple

$$V^2 > 0$$

si $\mathcal{E}$ es un vector tal que

$$V_t \cdot \mathcal{E}_t - V_x \mathcal{E}_x = 0$$



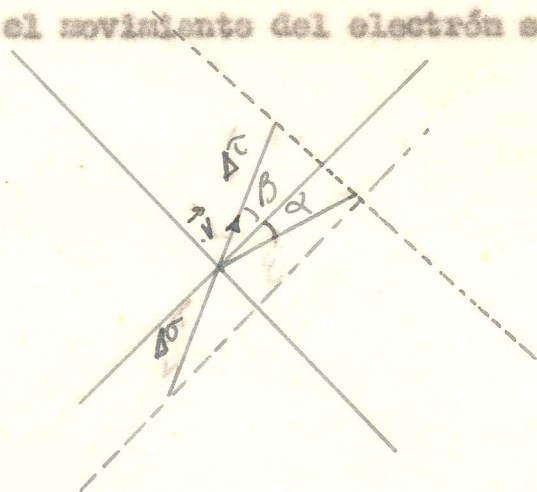
se tendrá

$$\frac{V_x}{V_t} = \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_x}$$

es decir, simétrico respecto del cono y, por lo tanto, un vector espacial ($\mathcal{E}^2 < 0$).

Vamos a calcular el potencial y el campo en este nuevo punto. Con respecto a él ubiquemos al punto retardado y al avanzado. Llamemos $\Delta\tau$ al tiempo propio que corresponde al punto avanzado y $\Delta\sigma$ al tiempo retardado.

Como $\mathcal{E}$ es muy pequeño, el movimiento del electrón se puede suponer con velocidad constante en ese punto. Observando la figura y teniendo presente la discusión de la página anterior, resulta:



$$\mathcal{E} = \Delta\sigma$$

y, además, $\alpha = \beta$

Por lo tanto, $|\mathcal{E}| = |\Delta\tau| = |\Delta\sigma|$

En el punto retardado que corresponde a este x tendremos:

$$(8) \quad \vec{u} = u_c + \left(\frac{du}{d\tau}\right)_c \Delta\tau + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2u}{d\tau^2}\right)_c (\Delta\tau)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3u}{d\tau^3}\right)_c (\Delta\tau)^3 + \dots$$

$$(9) \quad K = -(1-K'_c) \Delta\tau + \frac{1}{2} K''_c (\Delta\tau)^2 + \frac{1}{6} \left[\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 + K'''_c \right] (\Delta\tau)^3 + \dots$$

$$(10) \quad \Gamma = -\mathcal{E}^2 + (1-K'_c) (\Delta\tau)^2 - \frac{1}{3} K''_c (\Delta\tau)^3 + \dots$$

donde el subíndice c indica que se debe tomar el valor en el punto potenciado, y $K'_c K''_c$ indican $(\vec{r}, \frac{du}{d\tau})$
 $(\vec{r}, \frac{d^2u}{d\tau^2})$. Poniendo en esta $\vec{r}=0$ que equivale a tomar el punto retardado o avanzado, se obtiene:

$$(11) \quad \Delta\tau = \pm \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} K'_c + \frac{3}{8} K'^2_c \right) + \frac{1}{6} K''_c \varepsilon^2 + \dots$$

Este es el intervalo de tiempo propio en que hay que correrse en la línea de universo a partir del punto potenciado para encontrar el punto retardado correspondiente al que hemos designado con X en la figura, extremo del vector $(X-Z)$.

De (8), (10) y (11) resulta, para el potencial retardado:

$$\left\{ \frac{\mu}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\} = \frac{\mu_c}{\varepsilon} + \left(-\frac{du}{d\tau} + S K' \right)$$

El potencial avanzado es:

$$\Phi_{adv} = - \left(\frac{\mu}{\vec{r}, \vec{u}} \right)_{adv}$$

Luego, la expresión es la misma que para el retardado, cambiando el signo a toda la expresión y cambiando, por lo dicho en la página anterior ε por $-\varepsilon$. Para la diferencia de ambos, tendremos:

$$(12) \quad \frac{1}{2} \left[\Phi_{ret} - \Phi_{adv} \right] = - \left(\frac{du}{d\tau} \right)_c - \left(\frac{1}{3} \vec{u} K''' + \frac{d\vec{u}}{d\tau} K' \right) + \dots$$

Si $\vec{E}=0$ es cero, $K'''=0$ y $K'=0$ y la fórmula obtenida

coincide con la hallada anteriormente con el método de Hadamard (fórmula 7)

Nhabha y Harish Chandra (véase 9) llegaron a la conclusión que la expresión (11) y todas sus derivadas son de la forma:

$$(13) \quad \sum_0^{\infty} a_n \varepsilon^{2n}$$

donde las a_n son funciones de τ_c y de Γ_c que son finitas en la línea de universo.

Vamos a repetir el mismo cálculo usando el método de Hadamard. Ahora Γ no es necesariamente cero, pero para calcular las partes finitas logarítmicas es suficiente considerar un número pequeño. De la fórmula (10) despejamos $\Delta\tau$, obteniéndose como resultado:

$$(14) \quad \Delta\tau = \pm \left(1 + \frac{1}{2} K_c + \frac{3}{8} K_c'^2 \right) (\varepsilon^2 + \Gamma)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} (\varepsilon^2 + \Gamma) \pm \dots$$

Este valor hay que tomarlo para los tiempos avanzado y retardado. Con este valor, calculamos igual que antes:

$$(15) \quad \left(\frac{\mu}{\tilde{r}, \tilde{a}} \right)_{\text{ret}} = \frac{\mu_c}{(\varepsilon^2 + \Gamma)^{\frac{1}{2}}} + \left[-\frac{d\tilde{u}}{d\tau} + \frac{\tilde{u} K'}{2(\varepsilon^2 + \Gamma)^{\frac{1}{2}}} \right] + \left[\frac{\tilde{u}^2 \frac{3K'^2}{8(\varepsilon^2 + \Gamma)^{\frac{1}{2}}}}{8(\varepsilon^2 + \Gamma)^{\frac{1}{2}}} - \frac{K''}{3} - \frac{(\varepsilon^2 + \Gamma)^{\frac{1}{2}}}{24} \left(\frac{d\tilde{u}}{d\tau} \right)^2 \right] \tau.$$

y de la misma manera que Nhabha y Harish Chandra llegaron a la fórmula (13), se llega a

$$(16) \quad \sum_0^{\infty} a_n (\varepsilon^2 + \Gamma)^n + \sum_{-m}^{\infty} b_n (\varepsilon^2 + \Gamma)^{n + \frac{1}{2}}$$

donde m es o bien cero o un entero positivo.

El desarrollo (16) nos permite comparar los dos métodos

de cálculo, como lo hace observar Ha. El limiting process consiste en poner $\varepsilon = 0$ y tomar el promedio del valor avanzado menos el retardado, dando:

$$\frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} a_n \varepsilon^{2n} + \int_{-\infty}^0 b_n \varepsilon^{2n+1} + \left(\int_0^{\infty} a_n \varepsilon^{2n} - \int_{-\infty}^0 b_n \varepsilon^{2n+1} \right) \right\} = \int_0^{\infty} a_n \varepsilon^{2n}$$

poniendo finalmente $\varepsilon = 0$. En cambio, el método de Hadamard consiste en poner de entrada $\varepsilon = 0$ y en la integral (2) tomar la parte finita logarítmica. Se ve en las fórmulas que ambos métodos dan los mismos resultados, no solamente para el potencial, sino para todas las derivadas, y

VII. CALCULO DEL POTENCIAL Y CAMPO MESONICO

En la teoría del campo mesónico escalar, las potenciales del campo mesónico, es decir, del campo generado por un nucleón, satisfacen a la ecuación siguiente:

$$(1) \quad \Phi_{tt} - \Phi_{xx} - \Phi_{yy} - \Phi_{zz} + \chi^2 \Phi = 4\pi J$$

Vamos a resolverla siguiendo el mismo camino que el empleado en el caso electromagnético.

Aplicamos la fórmula de Green al mismo dominio tetradimensional que antes y teniendo en cuenta las fórmulas (4) y (5) III, obtenemos:

$$(2) \quad \Phi_i = -2 \iiint_V J_i dx dy dz dt + \frac{1}{2\pi} \iiint_V \left[V \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \Phi_i \frac{\partial V}{\partial s} \right] d\sigma$$

Reemplazando V por su expresión correspondiente:

$$V = \frac{J_0(x\sqrt{\Gamma})}{\Gamma} + \frac{\chi}{2\sqrt{\Gamma}} J_0'(x\sqrt{\Gamma}) \log \Gamma$$

teniendo en cuenta que es un nucleón puntual, representamos la tetracorrente por:

$$J_i = g \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) \delta(t-t_0) V_i(s) ds$$

La (2) nos queda, entonces:

$$(3) \quad \Phi_i = -2g \int_{-\infty}^{S_E} \left[\frac{J_0}{r} + W \log r \right] u_i ds + \frac{1}{2\pi} \iint_{M_{E0}/S} \left[\frac{J_0}{r} + W \log r \right] \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \Phi_i \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{J_0}{r} + W \log r \right] ds d\sigma$$

la integral en la base del cono desaparece por las condiciones supuestas en el infinito. El primer término del segundo término es análogo al que tenemos al calcular el potencial electromagnético. La única diferencia es el factor J_0 que aparece en el numerador, mientras que antes teníamos 1. Pero como $J_0(0) = 1$, la parte finita logarítmica, que depende de los valores tomados en un entorno infinitésimo del origen, vale lo mismo. La primera integral contribuye a la p. f. l. con:

$$(4) \quad \left\{ \frac{g \vec{u}}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}_0$$

g es la carga nucleónica, análoga al e del campo electromagnético. El segundo término da:

$$-2g \iiint_{\star} J_i W \log r \, dx dy dz dt = -2g \int_{-\infty}^{S_E} u_i W \log r \, ds$$

Vemos que este término da una contribución nula.

En efecto:

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{S_E} u_i W \log r \, ds = \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\epsilon} \frac{u_i \chi J_i(x|\Gamma)}{(\vec{r}, \vec{u}) \sqrt{\Gamma}} \log r \, d\Gamma$$

teniendo en cuenta que $J_1(x)$ tiende a cero como $\frac{1}{\sqrt{x}}$ cuando x tiende a infinito (véase C-M I pág. 455) y suponiendo que la velocidad del nucleón es menor que una constante menor que la velocidad de la luz, esta integral resulta convergente en ambos límites.

La integral sobre $M_{\epsilon\delta}$, según la fórmula (4) del párrafo III da:

$$(5) \quad I_{M_{\epsilon\delta}} = 2 \iiint_{G_{\epsilon\delta}} W J_i dx dy dz dt$$

Reemplazando W por su valor

$$W = \frac{x}{2\sqrt{r}} \quad J_0' = -\frac{x}{2\sqrt{r}} J_1(x\sqrt{r})$$

y teniendo en cuenta que la integral cuádruple se transforma en una integral sencilla a lo largo de la línea de universo del nucleón, se obtiene:

$$(6) \quad I_{M_{\epsilon\delta}} = -xg \int_{-\infty}^{s_{\epsilon}} \vec{u}_i \frac{J_1(x\sqrt{r})}{\sqrt{r}} ds$$

Juntando las fórmulas (4) (5) y (6) obtenemos para el potencial del campo mesónico, la expresión siguiente:

$$(7) \quad \Phi_m = \left\{ \frac{g\vec{u}}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}_0 - xg \int_{-\infty}^{s_{\epsilon}} \frac{\mu_0}{\sqrt{r}} J_1(x\sqrt{r}) ds$$

El primer término representa la contribución del

tiempo retardado. El otro, la de todos los tiempos anteriores. Para él no vale el principio de Huygens, pues una vez que ha pasado la onda, deja una difusión, que perdura indefinidamente.

Para hallar el campo, tenemos que calcular el rotor de esta expresión. Derivar directamente sería un trabajo arduo de modo que repetimos el método usado en el caso del campo electromagnético.

Recordemos que podemos derivar directamente bajo el signo de integral.

Usamos notación tensorial. Como antes, se tiene:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu}$$

Calcularemos una derivada, pues por diferencia de dos se obtiene el rotor y las dos presentan las mismas dificultades.

Partimos de la fórmula (3). La derivada de la primera integral nos da:

$$-2g \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial J_0}{\partial x^\mu} - J_0 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds = -2g \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{x}{r^{3/2}} \left(J_0' \frac{\partial}{\partial x^\mu} - J_0 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{1}{r^2} \right) \right) \right] ds$$

Teniendo en cuenta que $J_0(0) = 1$, el segundo término es igual al que teníamos al calcular el campo electromagnético, cambiando e por g . Su contribución a la p.f.l. es:

$$(8) \quad \left\{ \frac{g}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d}{ds} \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}$$

E

El primer término es divergente, pero la divergencia no es de tipo logarítmico, de modo que su contribución es nula.

Consideremos ahora la segunda integral extendida a la superficie lateral del cono. Teniendo en cuenta la fórmula (5') resulta:

$$-2 \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}} g \int_{-\infty}^{S_E} u_i W \log r ds = -2g \int_{-\infty}^{S_E} \frac{\partial W}{\partial \xi^{\mu}} g u_i \log r ds - 2 \int_{-\infty}^{S_E} \frac{g W u_i \xi^{\mu}}{r} ds$$

Recordando el comportamiento asintótico de W , la primera integral es convergente. Consideremos la segunda. Como la siguiente integral es convergente

$$2 \int_{-\infty}^{S_E} \left[g u_i \frac{W \xi^{\mu}}{r} - g \left(\frac{u_i W \xi^{\mu}}{r} \right)_0 \right] ds$$

y cambiando variables, resulta la p.f.l. igual a

$$\frac{2g W u_i \xi^{\mu}}{(\vec{r}, \vec{u})} \quad W = - \frac{x^2 J_1(x\sqrt{r})}{2(x\sqrt{r})}$$

Recordando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

obtenemos:

$$(9) \quad - \left\{ \frac{x^2 g u_i \xi^{\mu}}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}_0$$

Consideremos ahora la integral sobre la superficie la-

teral y derivémosla respecto de μ . Obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \iiint_{M_{\epsilon\delta}} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \frac{J_0}{r} + \frac{W}{r} \right) \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \frac{1}{2\pi} \iiint_{M_{\epsilon\delta}} \left[\Phi_i \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{J_0}{r} \right) + \Phi_i \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{W}{r} \right) \right] d\sigma \\ & + \iiint_{M_{\epsilon\delta}} \left(\Phi_i \frac{\partial W}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial s} \log r \right) d\sigma + \iiint_{M_{\epsilon\delta}} \left[\frac{\partial W}{\partial \mu} \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \Phi_i \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial W}{\partial \mu} \right] \log r d\sigma \end{aligned}$$

Las tres primeras integrales no contribuyen a la p.f.l. pues r es constante en el integrando y en ellas no aparece $\log r$ como factor. En cambio, la p.f.l. de la última es, evidentemente:

$$\frac{1}{2\pi} \iiint_{M_{\epsilon\delta}} \left[\frac{\partial W}{\partial \mu} \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \Phi_i \frac{\partial^2 W}{\partial s \partial \mu} \right] d\sigma$$

Cuando δ tiende a cero esta integral se extiende a la superficie lateral del cono. Aplicamos ahora la fórmula de Green nuevamente teniendo en cuenta que $\frac{\partial W}{\partial \mu}$ satisfase a la ecuación homogénea y además las condiciones iniciales de ser nulas la función y su derivada en el hiperplano infinitamente alejado. Se tiene:

$$\frac{1}{2\pi} \iiint_{M_{\epsilon\delta}} \left[\frac{\partial W}{\partial \mu} \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \Phi_i \left(\frac{\partial W}{\partial \mu} \right) \right] d\sigma = 2 \iiint_G \frac{\partial W}{\partial \mu} J_{ax} dy dz dt$$

La integral cuádruple se transforma en una inte-

gral sencilla a lo largo de la línea de universo.

Tenemos, pues, que calcular la siguiente integral:

$$2 \int_{-\infty}^{S_E} \frac{\partial W}{\partial f^{\mu}} g u_i ds$$

Vamos a calcular explícitamente el integrando reemplazando el valor de W y haciendo la derivación indicada.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial f^{\mu}} &= -\frac{\chi}{2} \frac{\partial}{\partial f^{\mu}} \left(\frac{J_1(\chi\sqrt{r})}{\sqrt{r}} \right) = \frac{\chi}{4} \frac{J_1(\chi\sqrt{r})}{r^{3/2}} \frac{f^{\mu}}{f^{\mu}} \cdot \frac{\chi^2}{4} \frac{f^{\mu}}{f^{\mu}} \frac{J_1'(\chi\sqrt{r})}{r} \\ &= -\frac{\chi}{4} \frac{f^{\mu}}{f^{\mu}} \left[\frac{\chi J_1'(\chi\sqrt{r})}{r} - \frac{J_1(\chi\sqrt{r})}{r^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$J_1'(\chi\sqrt{r}) = \frac{J_1'(\chi\sqrt{r})}{\chi\sqrt{r}} - J_2$$

resulta:

$$\frac{\partial W}{\partial f^{\mu}} = \frac{\chi^2}{4} \frac{f^{\mu}}{f^{\mu}} \frac{J_2(\chi\sqrt{r})}{r} = \frac{\chi^2(\chi-f)^{\mu}}{2} \frac{J_2(\chi\sqrt{r})}{r}$$

reemplazando en la integral, obtenemos finalmente

$$2 \int_{-\infty}^{S_E} \frac{\partial W}{\partial f^{\mu}} g u_i ds = \chi^2 g \int_{-\infty}^{S_E} \frac{f^{\mu}}{f^{\mu}} u_i \frac{J_2(\chi\sqrt{r})}{r} ds$$

el rotor va a resultar de restar una expresión aná-

lega en la que intercambiamos los subíndices

El rotor resultará

$$(10) \quad \chi^2 g \int_{-\infty}^{S_E} \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{r} J_2(\chi r) ds$$

donde como antes $[\vec{r}, \vec{u}]_{\mu\nu}$ significa $(r_\mu u_\nu - u_\mu r_\nu)$

La expresión final del campo mesónico se obtendrá sumando las fórmulas (8), (9) y (10)

$$F = \left\{ \frac{g}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d}{ds} \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}_0 - \frac{g\chi^2}{2} \left\{ \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right\}_0 + g\chi^2 \int_{-\infty}^{S_E} \frac{[\vec{r}, \vec{u}] J_2(\chi r)}{r} ds$$

Se ve que haciendo χ igual a cero se obtiene el campo electromagnético, dado por el primer término que es independiente de χ .

Se observa en esta fórmula, como en la expresión del potencial, la no-validez del principio de Huyghens.

Acción del campo sobre el mismo nucleón.

El primer término es análogo al ya tratado en el caso electromagnético, de modo que el razonamiento hecho allí para encontrar la parte finita logarítmica vale también aquí. Su contribución al campo es:

$$\frac{2}{3} g [\ddot{u}, u]$$

El segundo cuando vale cero en la línea de universo. Para verlo, desarrollamos en serie numerador y denominador, tomando límite para $s \rightarrow 0$. Se tiene:

$$[\vec{r}, \vec{u}] = -\frac{s^2}{2} [\ddot{\vec{u}}, \vec{u}]_0 + O(s^3)$$

$$(\vec{r}, \vec{u}) = -s + O(s^2)$$

El cociente vale

$$\frac{-\frac{s^2}{2} [\ddot{\vec{u}}, \vec{u}]_0 + O(s^3)}{-s + O(s^2)}$$

y, por lo tanto, cero en $s = 0$. El último término no tiene ninguna singularidad. Queda, finalmente:

$$F = \frac{2}{3} g [\ddot{\vec{u}}, \vec{u}]_0 + g \chi^2 \int_{-\infty}^{s_0} [\vec{r}, \vec{u}] \frac{J_2(\chi \sqrt{r})}{r} ds$$

VIII. APLICACION A LA SOLUCION APROXIMADA DE LA ECUACION DE DIRAC.

Supongamos tener un electrón en presencia de un campo electromagnético. Llamaremos ψ al espinor que describe el estado del electrón en ausencia de campo. La presencia de éste modifica al espinor. Desarrollándolo en serie de la siguiente manera, la ecuación a resolver es la siguiente:

$$(1) \quad \psi = \psi_0 + e \psi_1 + e^2 \psi_2 + \dots$$

$$(2) \quad \left(\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \hbar \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + i\beta mc \right) \psi = \frac{e}{i\hbar c} A_\mu(x,t) \alpha^\mu \psi$$

donde las α^i y β^i son las matrices de Dirac que cumplen conocidas relaciones de anticonmutación. Reemplazemos la ψ dada por la expresión (1). Tendremos:

$$\left(\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \hbar \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + i\beta mc \right) [\psi_0 + e \psi_1 + \dots] = \frac{e}{i\hbar c} A_\mu(x,t) \alpha^\mu [\psi_0 + e \psi_1 + \dots]$$

Vamos a ver cómo calcular ψ_1 . Ésta satisface la ecuación:

$$\left[\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \hbar \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + i\beta mc \right] \psi_1 = \frac{1}{ic} A_\mu(x,t) \alpha^\mu \psi_0$$

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + i\beta mc \right] \psi_1 = \frac{1}{i\hbar c} A_\mu(x,t) \alpha^\mu \psi_0$$

Multipliquemos ambos miembros por β y pongamos $\kappa = \frac{mc}{\hbar}$

$$(3) \quad \left[\frac{1}{c} \beta \frac{\partial}{\partial t} - \beta \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + i\beta^2 \kappa \right] \psi_1 = \frac{1}{i\hbar c} A_\mu \beta \alpha^\mu \psi_0$$

llamemos

$$\beta = e_0 \quad -\beta \alpha^i = e^i \quad \nabla = e^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

La expresión (3) puede escribirse así:

$$(\nabla + i\mu) \psi_1 = f(p)$$

Resolvamos ahora

$$(\square + \mu^2) J = f(p)$$

Por lo dicho en VII la solución es

$$J = -\frac{1}{2\eta} \iiint_{\mathbb{R}^3} f\left[\frac{J_0}{r} + W \log r\right] dQ + \frac{1}{2\eta} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left\{ \left[\frac{J_0}{r} + W \log r\right] \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\psi}{\partial s} \left(\frac{J_0}{r} + W \log r\right) \right\} ds$$

La solución de (4) será:

$$\psi_1 = (\nabla - i\mu) J$$

En efecto, como

$$(\nabla + i\mu)(\nabla - i\mu) = \square + \mu^2$$

resulta:

$$(\nabla + i\mu)(\nabla - i\mu) J = (\square + \mu^2) J = f(p)$$

$$(\nabla + i\mu) \psi_1 = f(p)$$

Juan José Giambra.

mucho gusto

BIBLIOGRAPHIA

1. Schwarz. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations.
2. K. Friedrichs. Die Verallgemeinerung der Riemannschen Methode auf eine beliebige gerade Anzahl von Dimensionen.
Göttingen Nachschrift, 1927, pag. 172.
3. Courant-Hilbert, II, página 443 y sigs.
4. Webster, Partial differential equations, páginas 246 y 264.
5. Bureau, F. Bull. Cl. Sci. (Séances) 34, 480-499. 1948.
6. Fremberg. Some applications of the Riesz potential to the theory of the electromagnetic field and the meson field.
Proc. Roy. Soc. 168, 1012, 1946.
7. Dirac. Classical theory of radiating electrons.
Proc. Roy. Soc. 167, 1938.
8. Equivalence of the Riesz method and the limiting process for the classical electromagnetic field of a point charge.
Physical Review, 71, 11 1947.
9. Pashka-Harish Chandras.
Proc. Roy. Soc. A. 165 .